ĐINH XUÂN KHOA
NGUYỄN HUY BẰNG

GIÁO TRÌNH
PHƯƠNG PHÁP TOÁN LÍ

(DÙNG CHO SINH VIÊN SƯ PHẠM VẬT LÍ)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VINH

Mở đầu

Toán cho vật lí là một môn học trang bị cho sinh viên ngành vật lí những kiến thức toán cần thiết để làm công cụ cho nghiên cứu vật lí. Đây là một môn học có sự giao thoa giữa toán và vật lí cho nên cũng có sự khác biệt giữa dạy toán cho những người chuyên nghiên cứu toán và cho những người dùng toán như một công cụ để nghiên cứu vật lí.

Hiện nay, vật lí học đã phát triển thành nhiều hướng chuyên sâu nên các kiến thức toán cho vật lí cũng rất đa dạng. Vì vậy, các trường đại học nghiên cứu thường lựa chọn những phần kiến thức toán cho vật lí đặc trưng với hướng nghiên cứu của trường mình. Đối với các trường đại học sư phạm, do không đòi hỏi cao về mức độ nghiên cứu vật lí chuyên sâu nên không có sự khác biệt nhiều về nội dung chương trình toán cho vật lí. Tuy nhiên, môn học này ở các trường sư phạm yêu cầu cao về tính trực quan, phương pháp trình bày dễ hiểu để làm nổi bật ý nghĩa vật lí và tránh để các phương trình toán học phức tạp che khuất bản chất vật lí.

Trên cơ sở đúc kết kinh nghiệm thực tiễn dạy học kết hợp với tham khảo giáo trình của các trường đại học ở trong và ngoài nước, chúng đã tôi biên soạn cuốn sách này để phục vụ cho đào tạo giáo viên vật lí. Sách được chia làm 6 chương, có bố cục như sau:

Chương 1: Đại số vectơ

Chương 2: Giải tích vectơ

Chương 3: Phương trình vật lí-toán

Chương 4: Hàm biến phức

Chương 5: Biến đổi tích phân

Chương 6: Phương pháp số và mô hình hóa số liệu.

Trong mỗi chương, ngoài phần lý thuyết chúng tôi đưa vào các ví dụ minh họa. Cuối mỗi chương là phần bài tập có hướng dẫn giải và đáp số để sinh viên tự học nhằm cũng cố kiến thức lý thuyết và vận dụng vào thực tế. Mặc dù mục đích giáo trình được viết cho sinh viên sư phạm nhưng chúng tôi đã mở rộng nhiều nội dung để có thể dùng cho sinh viên các ngành kỹ thuật và học viên cao học tham khảo.

Để cuốn sách được xuất bản, các tác giả đã nhận được nhiều ý kiến góp ý xây dựng của các đồng nghiệp: TS. Đinh Phan Khôi, GVC. Mạnh Tuấn Hùng, TS. Bùi Đình Thuận. Cảm ơn các NCS Lê Văn Đoài, Phan Văn Thuận và Nguyễn Tiến Dũng đã giúp đỡ các tác giả trong quá trình biên soạn.

Cuốn sách được biên soạn lần đầu nên khó tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được những góp ý xây dựng của bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Các tác giả.

MỤC LỤC

Chương 1

ĐẠI SỐ VECTƠ

1.1. Khái niệm vectơ

Trong vật lí, có những đại lượng mà khi chúng ta quy định các đơn vị đo thì sẽ được xác định hoàn toàn bằng một số, ví dụ như khối lượng, nhiệt độ, năng lượng, … Các đại lượng này được gọi là các *đại lượng vô hướng*.

Có những đại lượng mà khi xác định ta cần phải biết cả độ lớn và hướng của chúng trong không gian, ví dụ như lực, vận tốc, gia tốc ... Để mô tả các đại lượng này chúng ta dùng khái niệm vectơ. Vectơ *MN* (được ký hiệu là $\overrightarrow{MN}$) là đại lượng có độ lớn bằng độ dài đoạn *MN*, có hướng đi từ điểm đầu *M*tới điểm cuối *N* và được mô tả như trên hình 1.1a. Độ lớn của vectơ $\overrightarrow{MN}$ (còn gọi là độ dài hay module) được ký hiệu là $|\overrightarrow{MN}|$, là một số không âm và có giá trị được quy ước bằng độ dài đoạn *MN*.

Hình 1.1. Biểu diễn hình học của một vectơ $\overrightarrow{MN}$ (a) và vectơ đơn vị $\vec{e}_{MN}$ (b).

Dọc theo hướng của vectơ $\overrightarrow{MN}$ có độ dài khác không cho trước, chúng ta luôn chọn được một vectơ $\vec{e}_{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MN}$ và có độ dài bằng 1. Lúc đó, $\vec{e}_{MN}$ được gọi là *vectơ đơn vị* theo hướng của $\overrightarrow{MN}$ và được xác định (hình 1.1b):

$$\vec{e}_{MN} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}. \tag{1.1}$$

Một vectơ sẽ được xác định khi biết đầy đủ bốn đại lượng: *điểm đặt*, *phương*, *chiều* và *độ lớn*. Khi không quan tâm đến vị trí điểm đặt chúng ta ký hiệu vectơ bằng các chữ cái có dấu mũi tên phía trên, ví dụ: $\vec{a}, \vec{A}, \vec{b}, \vec{B}$, ... hoặc bằng các chữ cái in đậm, ví dụ: **a, A, b, B**, ... Trong tài liệu này, chúng ta quy ước viết vectơ theo cách có sử dụng dấu mũi tên phía trên.

Các vectơ có điểm đặt tuỳ ý được gọi là *vectơ tự do*. Khi điểm đặt bị giới hạn trên đường thẳng chứa vectơ đó thì vectơ ấy được gọi là *vectơ trượt*, chẳng hạn như khi xét lực tác dụng lên vật rắn có thể chọn điểm bất kỳ trên vật rắn mà giá của lực đi qua làm điểm đặt. Cuối cùng, những vectơ mà điểm đặt cần phải cố định thì được gọi là *vectơ buộc*, chẳng hạn như khi xét chuyển động của chất điểm thì vectơ lực tác dụng cần phải đặt lên chính chất điểm đó.

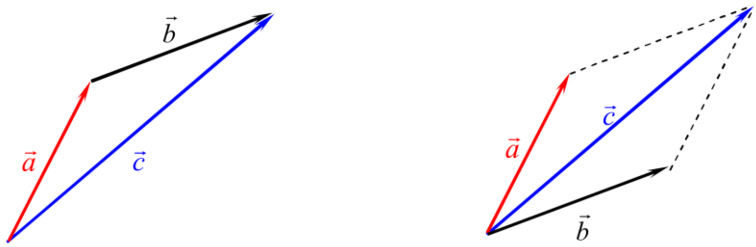
Để nghiên cứu các vectơ buộc và các vectơ trượt chúng ta có thể quy về nghiên cứu theo các vectơ tự do. Ở các phần tiếp theo, khi không có yêu cầu gì riêng về điểm đặt thì ta ngầm định các vectơ được xem xét là vectơ tự do.

1.2. Các phép toán cơ bản trên vectơ

Các phép toán cộng, trừ và nhân trong đại số vectơ được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong đại số các số. Các định nghĩa này được lấy làm cơ sở và phát biểu như sau:

1. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng thứ nguyên được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có *cùng độ dài* và *cùng hướng*.
2. Một vectơ có hướng ngược với hướng của vectơ $\vec{a}$ nhưng có cùng độ dài, được gọi là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$ và ký hiệu là $-\vec{a}$.
3. Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ $\vec{c}$ thu được bằng cách đặt điểm đầu của vectơ $\vec{b}$ kế tiếp điểm cuối của vectơ $\vec{a}$ và nối điểm đầu của vectơ $\vec{a}$ với điểm cuối của vectơ $\vec{b}$. Cách thức

tổng hợp hai vectơ như vậy được gọi là *quy tắc tam giác* và được minh họa trên hình 1.2. Ngoài quy tắc tam giác, chúng ta còn dùng *quy tắc hình bình hành*. Từ định nghĩa tổng các vectơ chúng ta thấy rằng tổng này khác với tổng đại số của các đoạn thẳng. Vì vậy chúng ta gọi là tổng hình học.



Hình 1.2. Minh họa phép cộng hai vectơ theo quy tắc tam giác (bên trái) và quy tắc hình bình hành (bên phải).

4. Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (ký hiệu $\vec{a}-\vec{b}$), là vectơ $\vec{c}$ tìm được bằng cách lấy vectơ $\vec{a}$ cộng với vectơ đối của $\vec{b}$, nghĩa là $\vec{c}$ = $\vec{a}-\vec{b}$ = $\vec{a}$ + (-$\vec{b}$). Nếu $\vec{a}$ = $\vec{b}$ thì $\vec{a}$ - $\vec{b}$ được định nghĩa bằng vectơ không (ký hiệu là $\vec{0}$), có độ lớn bằng 0 và có hướng tuỳ ý. Đối với mỗi một vectơ $\vec{a}$ bất kỳ chúng ta có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
5. Tích của vectơ $\vec{a}$ với một số λ tạo ra vectơ $\lambda\vec{a}$, có độ lớn bằng λ lần vectơ $\vec{a}$ và cùng hướng hoặc ngược hướng vectơ $\vec{a}$ tuỳ thuộc vào λ dương hay âm. Nếu λ = 0 thì $\lambda\vec{a}$ bằng vectơ không. Tương tự, nếu vectơ $\vec{a}$ là vectơ không thì với mọi λ ta có $\lambda\vec{0}=\vec{0}$

Từ đây, chúng ta rút ra các quy tắc của đại số vectơ: nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các vectơ, λ_1 và λ_2 là các vô hướng thì:

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính giao hoán đối với phép cộng)

b) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (tính kết hợp đối với phép cộng)

c) $\lambda_1(\lambda_2\vec{a})=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$ (tính kết hợp đối với phép nhân)

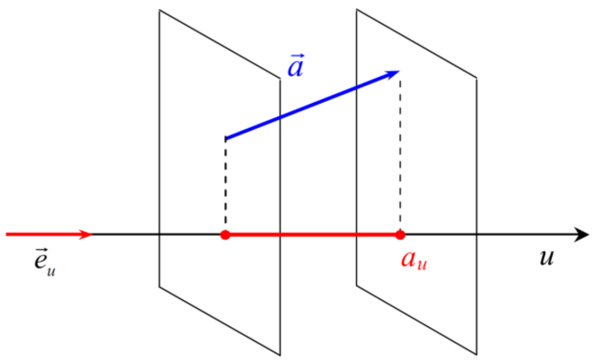
d) $(\lambda_1+\lambda_2)\,\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$ (tính phân phối)

e) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (tính phân phối)

6. Phép chiếu vectơ lên một trục. Cho vectơ $\vec{a}$ và một trục u với chiều dương được xác định bởi vectơ đơn vị $\vec{e}_u$ như trên hình 1.3. Xét hai mặt phẳng vuông góc với trục u và đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ $\vec{a}$, chúng cắt trục u thành một đoạn thẳng có độ dài $|a_u|$. Chúng ta định nghĩa hình chiếu của vectơ $\vec{a}$ lên trục u, ký hiệu là a_u, được xác định bởi công thức

$$a_u = |\vec{a}|\cos(\vec{e}_u,\vec{a}) = |\vec{a}|\cos\alpha, \tag{1.2}$$

trong đó,α là góc tạo bởi vectơ $\vec{a}$ và chiều dương của trục u.



Hình 1.3. Biểu diễn hình chiếu của vectơ $\vec{a}$ lên một trục.

Như vậy, hình chiếu của vectơ $\vec{a}$ lên trục u là một đại lượng đại số phụ thuộc vào sự định hướng của vectơ $\vec{a}$, nó bằng 0 khi $\vec{a}$ vuông góc với trục u, nó nhận giá trị dương nếu $\vec{a}$ tạo với chiều dương của trục u một góc bé hơn 90^o và nhận giá trị âm khi $\vec{a}$ tạo với chiều dương của trục u một góc lớn hơn 90^o. Độ lớn của của a_u chính bằng độ dài đoạn thẳng tạo bởi hai mặt phẳng nói trên với trục u.

1.3. Hệ vectơ cơ sở

1.3.1. Sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính của các vectơ

Xét tập hợp *n* vectơ { $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,... $\vec{a}_n$ }, chúng ta định nghĩa tập hợp các véctơ này là *phụ thuộc tuyến tính* với nhau nếu tồn tại *n* số λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ *không đồng thời bằng không* sao cho:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}. \tag{1.3}$$

Trong trường hợp (1.3) chỉ thoả mãn khi tất cả các hệ số $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ *đồng thời bằng không* thì chúng ta nói hệ *n* vectơ trên là *độc lập tuyến tính*. Với các định nghĩa này chúng ta có thể dễ dàng suy ra một số tính chất sau đây:

a) Hai vectơ phụ thuộc tuyến tính là cộng tuyến (song song) với nhau. Thật vậy, khi $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại một hệ số λ_i khác không (giả sử λ_1) và thỏa mãn đẳng thức (1.3), nghĩa là

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2=0.$$

Chia hai vế cho λ_1 chúng ta được $\vec{a}_1=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2$, nghĩa là $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ cộng tuyến.

b) Ba vectơ phụ thuộc tuyến tính với nhau sẽ nằm trong một mặt phẳng (đồng phẳng). Thật vậy, xét ba vectơ phụ thuộc tuyến tính $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ và $\vec{a}_3$. Theo định nghĩa chúng ta giả sử hệ số λ_1 khác không. Khi đó hệ thức (1.3) được biến đổi thành:

$$\vec{a}_1=m\vec{a}_2+n\vec{a}_3,\ \textit{với}\ m=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\ \ n=-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}.$$

Vì $m\vec{a}_2$ và $n\vec{a}_3$ tương ứng cộng tuyến với các vectơ $\vec{a}_2$ và $\vec{a}_3$ nên từ quy tắc cộng vectơ (hình 1.2) ta suy ra ba vectơ này đồng phẳng.

1.3.2. Khai triển một vectơ theo các vectơ khác

Xét hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ độc lập tuyến tính, khi đó bất kỳ vectơ $\vec{c}$ nào đồng phẳng với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cũng luôn biểu diễn được theo hệ thức:

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}, \tag{1.4}$$

với *m, n* là các số thực không đồng thời bằng không. Sự khai triển vectơ $\vec{c}$ theo các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là duy nhất, nghĩa là chỉ tồn tại duy nhất một bộ các số (*m, n*) thoả mãn (1.4). Chúng ta sẽ chứng minh điều này bằng cách giả thiết tồn tại một khai triển khác được xác định bởi:

$$\vec{c} = m'\vec{a} + n'\vec{b}. \tag{1.4a}$$

Trừ vế theo vế của (1.4) cho (1.4a) chúng ta được:

$$(m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} = 0.$$

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ độc lập tuyến tính nên đẳng thức này chỉ xảy ra khi $m = m'$ và $n = n'$, nghĩa là các hệ số *m* và *n* của phép biểu diễn trên đây là duy nhất.

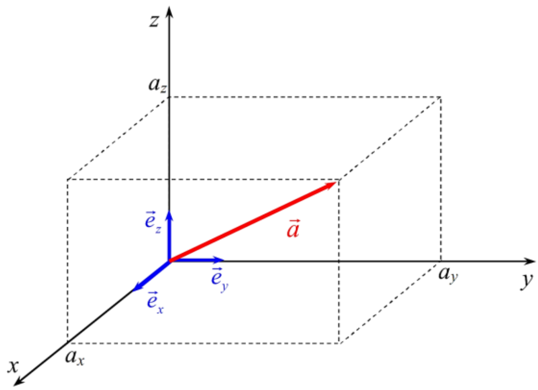
Kết quả trên đây dễ dàng được mở rộng cho trường hợp ba vectơ độc lập tuyến tính $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$. Khi đó, một vectơ $\vec{d}$ bất kỳ luôn khai triển được theo hệ thức:

$$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}, \tag{1.5}$$

với bộ các hệ hệ số khai triển (*m, n, p*) duy nhất.

1.3.3. Hệ vectơ cơ sở

Như đã trình bày trên đây, một vectơ bất kỳ trong không gian ba chiều luôn được biểu diễn theo theo hệ ba vectơ độc lập tuyến tính. Chúng ta nói rằng hệ ba vectơ độc lập tuyến tính (ký hiệu là $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$) tạo thành một *hệ vectơ cơ sở* đối với không gian ba chiều, bản thân các vectơ $\vec{e}_i$ được gọi là các *vectơ cơ sở*. Như vậy, với bất kỳ ba vectơ độc lập tuyến tính đều tạo thành một hệ vectơ cơ sở cho không gian ba chiều.



Hình 1.4. Biểu diễn vectơ $\vec{a}$ trong hệ vectơ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

Trong vật lí, để tiện lợi cho các tính toán ta thường hay dùng các hệ *vectơ cơ sở trực chuẩn* (các vectơ cơ sở lần lượt vuông góc với nhau và có module bằng 1). Một trong những hệ vectơ cơ sở thường hay sử dụng là hệ cơ sở trực chuẩn Descartes $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ được biểu diễn như trên hình 1.4.

Trong hệ cơ sở trực chuẩn Descartes, vectơ $\vec{a}$ được biểu diễn theo các vectơ cơ sở như sau:

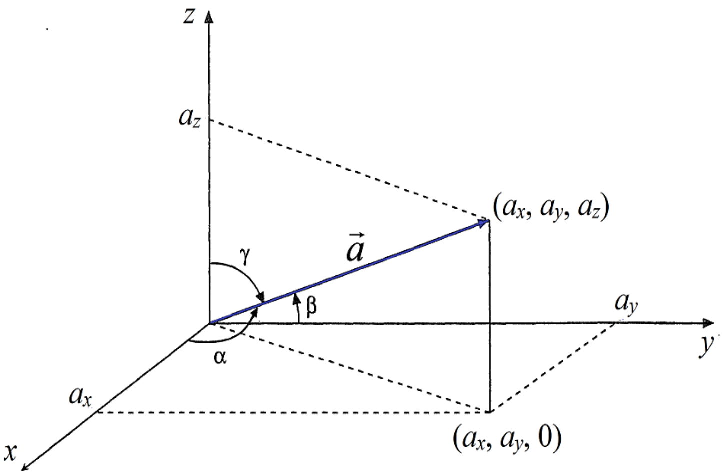
$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z\,, \tag{1.6a}$$

hoặc dưới dạng khác

$$\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)\,. \tag{1.6b}$$

Chúng ta gọi a_x, a_y và a_z là các thành phần của vectơ $\vec{a}$ trong hệ cơ sở $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Bằng biểu diễn hình học chúng ta dễ nhận thấy a_x, a_y và a_z chính là thành phần hình chiếu của vectơ $\vec{a}$ tương ứng lên các trục *x*, *y* và *z* (xem hình 1.4). Khi đó, module của vectơ $\vec{a}$ được tính theo các thành phần hình chiếu của nó bởi công thức:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.7}$$



Hình 1.5. Các góc chỉ phương của vectơ $\vec{a}$ trong không gian.

Ngoài module, hướng của vectơ $\vec{a}$ trong hệ cơ sở này được xác định thông qua các *góc chỉ phương α, β* và *γ* (xem hình 1.5) như sau:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{1.8}$$

Các đại lượng cos*α,* cos*β* và cos*γ* xác định theo (1.8) được gọi là các *cosin chỉ phương* của vectơ $\vec{a}$. Khi đó, từ (1.1), (1.7) và (1.8) chúng ta xác định được vectơ đơn vị theo hướng của vectơ $\vec{a}$ (kí hiệu là $\vec{e}_a$):

$$\vec{e}_a = (\cos\alpha)\vec{e}_x + (\cos\beta)\vec{e}_y + (\cos\gamma)\vec{e}_z. \tag{1.9}$$

1.3.4. Biến đổi giữa các hệ vectơ cơ sở

Giả sử có hai hệ vectơ cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ và $\{\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \vec{e}_3^{\,'}\}$ có chung một điểm gốc O. Khi đó, bất kỳ một vectơ cơ sở của hệ thứ nhất đều có thể khai triển được theo hệ vectơ cơ sở thứ hai và ngược lại. Gọi $\alpha_{i'}^1, \alpha_{i'}^2, \alpha_{i'}^3$ (*i* = 1, 2, 3) tương ứng là các hệ số khai triển của vectơ $\vec{e}_i^{\,'}$ theo các vectơ cơ sở $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Khi đó

$$\left.\begin{aligned}\vec{e}_1^{\,'} &= \alpha_{1'}^{1}\vec{e}_1 + \alpha_{1'}^{2}\vec{e}_2 + \alpha_{1'}^{3}\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{1'}^{k}\vec{e}_k \\ \vec{e}_2^{\,'} &= \alpha_{2'}^{1}\vec{e}_1 + \alpha_{2'}^{2}\vec{e}_2 + \alpha_{2'}^{3}\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{2'}^{k}\vec{e}_k \\ \vec{e}_3^{\,'} &= \alpha_{3'}^{1}\vec{e}_1 + \alpha_{3'}^{2}\vec{e}_2 + \alpha_{3'}^{3}\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{3'}^{k}\vec{e}_k\end{aligned}\right\}, \qquad (1.10)$$

hoặc dưới dạng ngắn gọn hơn

$$\vec{e}_i^{\,'} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{i'}^{k}\vec{e}_k \quad (i = 1,\ 2,\ 3)\,. \qquad (1.11)$$

Toàn bộ chín hệ số $\alpha_{i'}^{k}$ (*i*, *k* = 1, 2, 3) được gọi là các *hệ số của phép biến đổi thuận* các vectơ cơ sở $\vec{e}_i^{\,'}$ theo hệ cơ sở $\vec{e}_i$.

Hoàn toàn tương tự, chúng ta có thể thiết lập được *phép biến đổi ngược* các vectơ $\vec{e}_i$ theo hệ cơ sở $e_i^{'}$ bởi hệ thức

$$\vec{e}_i = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{i}^{k'}\vec{e}_k^{\,'} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \qquad (1.12)$$

trong đó $\alpha_i^{k'}$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ được gọi là các hệ số của phép biến đổi ngược.

Chúng ta tìm mối quan hệ giữa các hệ số trong các phép biến đổi thuận và biến đổi ngược bằng cách thay các vectơ $\vec{e}_i$ trong (1.12) vào (1.11), kết quả thu được:

$$\begin{aligned}\vec{e}_i^{\,'} &= \alpha_{i'}^{1}\vec{e}_1 + \alpha_{i'}^{2}\vec{e}_2 + \alpha_{i'}^{3}\vec{e}_3 \\ &= \alpha_{i'}^{1}(\alpha_1^{1'}\vec{e}_1^{\,'} + \alpha_1^{2'}\vec{e}_2^{\,'} + \alpha_1^{3'}\vec{e}_3^{\,'}) + \alpha_{i'}^{2}(\alpha_2^{1'}\vec{e}_1^{\,'} + \ldots) + \alpha_{i'}^{3}(\alpha_3^{1'}\vec{e}_1^{\,'} + \ldots) \\ &= (\alpha_{i'}^{1}\alpha_1^{1'} + \alpha_{i'}^{2}\alpha_2^{1'} + \alpha_{i'}^{3}\alpha_3^{1'})\vec{e}_1^{\,'} + (\alpha_{i'}^{1}\alpha_1^{2'} + \ldots)\vec{e}_2^{\,'} + (\alpha_{i'}^{1}\alpha_1^{3'} + \ldots)\vec{e}_3^{\,'} \qquad (1.13) \\ &= \vec{e}_1^{\,'}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{i'}^{l}\alpha_l^{1'} + \vec{e}_2^{\,'}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{i'}^{l}\alpha_l^{2'} + \vec{e}_3^{\,'}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{i'}^{l}\alpha_l^{3'} \\ &= \sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k^{\,'}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{i'}^{l}\alpha_l^{k'}\end{aligned}$$

Làm hoàn toàn tương tự bằng cách thay $\vec{e}_i^{\,'}$ trong (1.11) vào (1.12) chúng ta thu được

$$\vec{e}_i = \vec{e}_1 \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^1 + \vec{e}_2 \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^2 + \vec{e}_3 \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^3 ,$$

hay

$$\vec{e}_i = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^k . \tag{1.14}$$

Do tính chất độc lập tuyến tính giữa các vectơ cơ sở nên từ các hệ thức (1.13) và (1.14) chúng ta rút ra được mối liên hệ giữa các hệ số biến đổi:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'}^{l} \alpha_l^{j'} &= \begin{cases} 0 \text{ nếu } & i \neq j, \\ 1 \text{ nếu } & i = j, \end{cases} \\ \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^{j} &= \begin{cases} 0 \text{ nếu } & i \neq j, \\ 1 \text{ nếu } & i = j. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.4. Tích của hai vectơ

1.4.1. Tích vô hướng

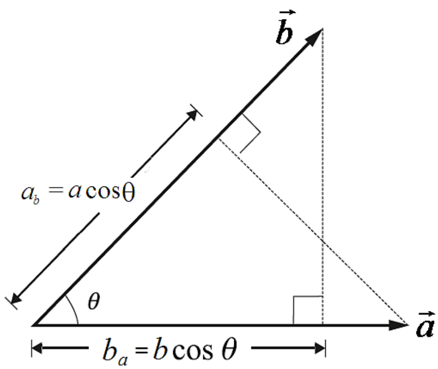
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta định nghĩa *tích vô hướng* hay còn gọi là *nội tích* của hai vectơ này (ký hiệu bởi $\vec{a}.\vec{b}$) là đại lượng có giá trị bằng tích module của các vectơ đó nhân với cosin của góc giữa chúng, nghĩa là:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) . \tag{1.16}$$

Ở đây, để xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ chúng ta tịnh tiến chúng về cùng chung điểm gốc, khi đó góc nhỏ nhất hợp bởi hai vectơ này được gọi là góc giữa hai vectơ.

Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ là một đại lượng vô hướng, có dấu và độ lớn phụ thuộc vào góc giữa các vectơ này. Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau (trực giao) thì tích vô hướng của chúng bằng không. Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ song song với nhau thì tích vô hướng giữa chúng đạt trị số lớn nhất.

Dễ thấy rằng, đại lượng $|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ là hình chiếu của $\vec{a}$ (ký hiệu là a_b) lên hướng của $\vec{b}$ (Hình 1.6). Còn $|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ bằng hình chiếu của $\vec{b}$ lên hướng của $\vec{a}$ (ký hiệu là b_a).



Hình 1.6. Biểu diễn hình học của tích vô hướng hai vectơ.

Từ hình 1.6, chúng ta có thể phát biểu tích vô hướng của hai vectơ bằng độ lớn của một vectơ nhân với hình chiếu của vectơ còn lại lên hướng của vectơ này, nghĩa là

$$\vec{a}.\vec{b} = a_b\left|\vec{b}\right| = b_a\left|\vec{a}\right|. \tag{1.17}$$

Đối với phép nhân vô hướng chúng ta có một số tính chất sau:

a) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$, (tính giao hoán)

b) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$, (tính phân phối).

Lập tích vô hướng giữa các vectơ đơn vị của hệ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, ta có các hệ thức:

$$\vec{e}_x.\vec{e}_x = \vec{e}_y.\vec{e}_y = \vec{e}_z.\vec{e}_z = 1;\quad \vec{e}_x.\vec{e}_y = \vec{e}_y.\vec{e}_z = \vec{e}_z.\vec{e}_x = 0. \tag{1.18}$$

Nhờ các công thức này cùng với các tính chất đã trình bày ở mục 1.2, chúng ta dễ dàng suy ra được biểu thức của $\vec{a}.\vec{b}$ qua các thành phần của chúng:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \tag{1.19}$$

Kết hợp công thức (1.7) và (1.19) chúng ta tính được cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ theo các thành phần của các vectơ này

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}. \tag{1.20}$$

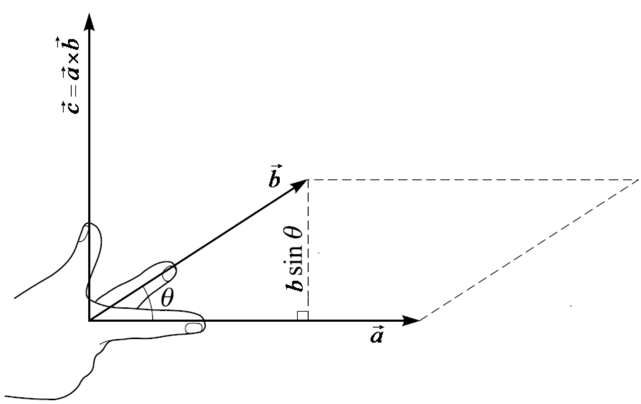
1.4.2. Tích vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta định nghĩa *tích vectơ* hay *ngoại tích* của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{c}$ được ký hiệu

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} . \tag{1.21}$$

Vectơ $\vec{c}$ được xác định:

- Độ lớn: $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$; (1.22)
- Phương: vuông góc với mặt phẳng chứa các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$;
- Chiều: có chiều sao cho ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ theo thứ tự lập thành một *hệ thuận phải* (xem hình 1.7).



Hình 1.7. Biểu diễn hình học của tích vectơ $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Chú ý: Về mặt hình học, từ hình 1.7 cho thấy độ lớn của tích vectơ $\vec{a}\times\vec{b}$ bằng diện tích hình bình hành tạo bởi các cạnh a và b. Diện tích này đạt giá trị lớn nhất khi các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, bằng không khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ song song với nhau.

Với định nghĩa trên chúng ta rút ra được một số tính chất của tích vectơ như sau:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}, \qquad \text{(tính phản giao hoán)}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}, \qquad \text{(tính phân phối).}$$

Ngoài ra, nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ không thì $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ song song với nhau.

Trong hệ cơ sở trực chuẩn ba chiều $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, ta có các hệ thức:

$$\begin{cases} \vec{e}_x\times\vec{e}_x = \vec{e}_y\times\vec{e}_y = \vec{e}_z\times\vec{e}_z = 0 \\ \vec{e}_x\times\vec{e}_y = -\vec{e}_y\times\vec{e}_x = \vec{e}_z \\ \vec{e}_y\times\vec{e}_z = -\vec{e}_z\times\vec{e}_y = \vec{e}_x \\ \vec{e}_z\times\vec{e}_x = -\vec{e}_x\times\vec{e}_z = \vec{e}_y. \end{cases} \tag{1.23}$$

Sử dụng (1.6a) và (1.23), ta có thể biểu diễn tích vectơ $\vec{a}\times\vec{b}$ theo các thành phần tọa độ của chúng:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{e}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{e}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{e}_z, \tag{1.24}$$

hoặc dưới dạng định thức:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.25}$$

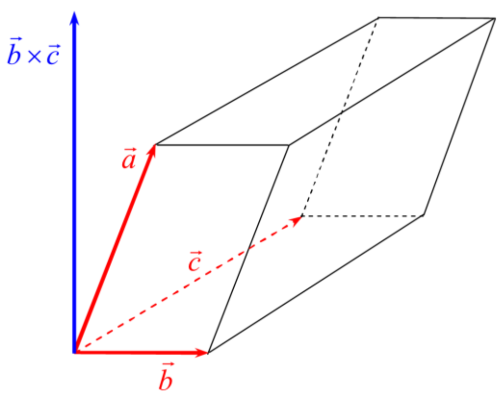
1.5. Tích bội ba

1.5.1. Tích bội ba vô hướng

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, *tích bội ba vô hướng* được thiết lập bằng cách nhân có hướng giữa hai vectơ và sau đó nhân vô hướng với vectơ còn lại. Kết quả chúng ta sẽ thu được một vô hướng. Xét trường hợp vectơ $\vec{b}$ được nhân có hướng với vectơ $\vec{c}$, sau đó nhân vô hướng với vectơ $\vec{a}$. Kết quả, chúng ta được một vô hướng, ký hiệu là *V*:

$$V = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}). \tag{1.26}$$

Trên phương diện hình học, do $\vec{b} \times \vec{c}$ có độ lớn bằng diện tích hình bình hành tạo bởi các cạnh b và c nên $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ là một vô hướng có giá trị bằng thể tích hình hộp tạo bởi các cạnh *a, b* và *c* như trên hình 1.8.



Hình 1.8. Biểu diễn hình học của tích bội ba vô hướng $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$.

Sử dụng dạng định thức (1.25) chúng ta có thể biểu diễn tích bội ba vectơ theo các thành phần hình chiếu trong hệ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ như sau:

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z).\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.27}$$

Dễ nhận thấy rằng, trong trường hợp các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng (nghĩa là phụ thuộc tuyến tính) thì tích bội ba vô hướng của chúng bằng không. Vì vậy, ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tạo thành hệ cơ sở khi tích bội ba vô hướng của chúng khác không. Ngoài ra, chúng ta còn có thể chứng minh được rằng

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}), \qquad (1.28)$$

nghĩa là tích bội ba vô hướng không thay đổi khi hoán vị vòng quanh các vectơ, nó có giá trị bằng thể tích hình hộp có các cạnh là *a, b, c*.

1.5.2. Tích bội ba vectơ

Trong tích bội ba vectơ, hai vectơ được nhân vectơ với nhau, sau đó được nhân vectơ với vectơ còn lại, chẳng hạn $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. Rõ ràng $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ là một vectơ vừa vuông góc với $\vec{a}$, vừa vuông góc với $\vec{b}\times\vec{c}$. Vì thế, trong trường hợp chung thì thứ tự của phép nhân là rất quan trọng và cho các kết quả khác nhau, nghĩa là

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c}).$$

Dựa vào các thành phần hình chiếu của tích bội ba vectơ ta có thể thu được định luật khai triển sau:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b}). \qquad (1.29)$$

Thực vậy, lấy thành phần hình chiếu theo phương *x* của vế trái đẳng thức trên ta có:

$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]_x = a_y(\vec{b}\times\vec{c})_z - a_z(\vec{b}\times\vec{c})_y$$

$$= a_y(b_xc_y - b_yc_x) - a_z(b_zc_x - b_xc_z)$$

$$= b_x(a_yc_y + a_zc_z) - c_x(a_yb_y + a_zb_z).$$

Thêm và bớt lượng $a_xb_xc_x$ vào biểu thức trên, khi đó chúng ta nhận được:

$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]_x = b_x(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z) - c_x(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)$$

$$= b_x(\vec{a}.\vec{c}) - c_x(\vec{a}.\vec{b}). \qquad (1.30)$$

Hệ thức trên thoả mãn theo phương x nên cũng thỏa mãn theo các phương còn lại (do vai trò của các phương x, y, z như nhau). Từ đó, chúng ta suy ra được hệ thức(1.29).

Khi hoán vị vòng quanh các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trong (1.29) chúng ta có:

$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})] = \vec{b}\,(\vec{a}\,.\vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a}\,.\vec{b}\,), \tag{1.31a}$$

$$[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})] = \vec{c}\,(\vec{b}\,.\vec{a}\,) - \vec{a}\,(\vec{b}\,.\vec{c}\,), \tag{1.31b}$$

$$[\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})] = \vec{a}\,(\vec{c}\,.\vec{b}\,) - \vec{b}\,(\vec{c}\,.\vec{a}\,). \tag{1.31c}$$

Cộng cả ba đẳng thức với nhau chúng ta được đồng nhất thức:

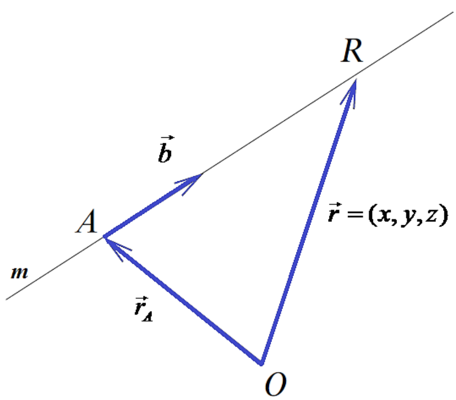
$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})] + [\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})] + [\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})] = 0. \tag{1.32}$$

1.6. Một số ứng dụng

1.6.1. Phương trình đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu

a. Phương trình đường thẳng

Cho một điểm A có vectơ vị trí $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$ trong không gian, giả sử cần tìm phương trình đường thẳng m đi qua A, có vectơ chỉ phương $\vec{b}$ được cho như trên hình 9.



Hình 1.9. Minh họa đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A, y_A, z_A)$ và $R(x, y, z)$.

Để thiết lập phương trình của đường thẳng m, ta xét điểm R được xác định bởi vectơ vị trí $\vec{r} = (x, y, z)$ bất kỳ nằm trên đường thẳng này. Mặc dù vectơ $\vec{r}$ thay đổi khi điểm *R* chạy dọc theo đường thẳng *m* nhưng vectơ này luôn được xác định theo hai vectơ cố định $\vec{r}_A$ và $\vec{b}$ bởi:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\vec{b}, \tag{1.33}$$

với λ là một tham số có giá trị tùy thuộc vào vị trí điểm *R*. Biểu thức (1.33) được gọi là *dạng tham số của phương trình đường thẳng*.

Thực hiện biến đổi phương trình (1.33) thành:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_A}{\vec{b}} = \lambda. \tag{1.34}$$

Để phương trình này thỏa mãn với mọi điểm *R* thì các thành phần hình chiếu của các vectơ bên vế trái (1.34) phải thỏa mãn:

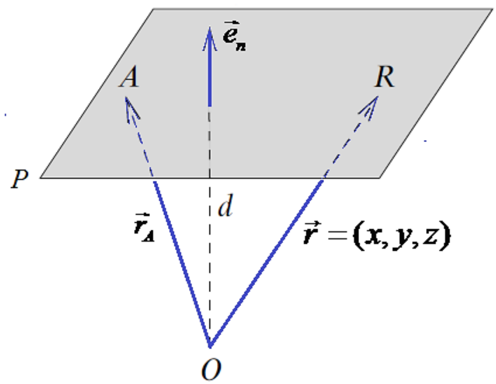
$$\frac{x - x_A}{b_x} = \frac{y - y_A}{b_y} = \frac{z - z_A}{b_z} = \text{constant}. \tag{1.35}$$

Biểu thức (1.35) được gọi là *phương trình đường thẳng* đi qua điểm *A* và nhận $\vec{b}$ làm vectơ chỉ phương. Ngoài ra, ta có thể viết phương *trình đường thẳng dưới dạng vectơ* bằng cách nhân có hướng hai vế của (1.33) với $\vec{b}$. Kết quả thu được:

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_A\right) \times \vec{b} = 0. \tag{1.36}$$

b. Phương trình mặt phẳng

Cho một điểm *A* cố định trong không gian, có vectơ vị trí $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$. Giả sử ta cần tìm phương trình mặt phẳng *P* đi qua *A* và nhận vectơ đơn vị $\vec{e}_n$ cho trước làm vectơ pháp tuyến. Để tìm phương trình cho mặt phẳng ta xét điểm *R* (có vectơ vị trí $\vec{r} = (x, y, z)$) nào đó nằm trên mặt phẳng cần tìm (Hình 1.10).



Hình 1.10. Minh họa mặt phẳng *P* đi qua điểm *A* và có pháp tuyến $\vec{e}_n$.

Do vectơ pháp tuyến $\vec{e}_n$ vuông góc với mọi vectơ nằm trong mặt phẳng cần tìm nên:

$$(\vec{r} - \vec{r}_A).\vec{e}_n = 0. \tag{1.37}$$

Biểu thức (1.37) được gọi là *dạng vectơ của phương trình mặt phẳng*. Viết lại (1.37) dưới dạng $\vec{r}.\vec{e}_n = \vec{r}_A.\vec{e}_n$ và chú ý rằng $\vec{r}_A.\vec{e}_n = d$, với *d* là khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng *P*. Từ đây, *phương trình của mặt phẳng P* được viết dưới dạng:

$$kx + ly + mz = d, \tag{1.38}$$

với (*k*, *l*, *m*) là các thành phần của vectơ đơn vị pháp tuyến $\vec{e}_n$ của mặt phẳng.

c. Phương trình mặt cầu

Cho một điểm *C* có vectơ vị trí $\vec{r}_C$ cố định trong không gian, giả sử cần tìm phương trình mặt cầu nhận *C* làm tâm và có bán kính bằng *a* cho trước. Để tìm phương trình cho mặt cầu ta xét điểm *R* được xác định bởi vectơ vị trí $\vec{r}$ nằm bất kỳ trên mặt cầu đó. Do khoảng cách cách từ mọi điểm trên mặt cầu đến tâm *C* luôn bằng *a* nên ta dễ dàng suy ra:

$$|\vec{r} - \vec{r}_C|^2 = (\vec{r} - \vec{r}_C).(\vec{r} - \vec{r}_C) = a^2, \tag{1.39}$$

hay

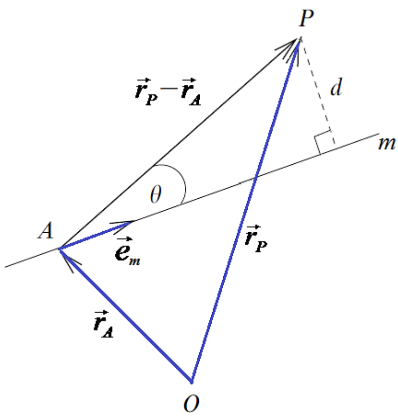
$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=a^2. \quad (1.40)$$

Phương trình (1.39) hoặc (1.40) được gọi là *phương trình mặt cầu* có tâm C và bán kính a.

1.6.2. Khoảng cách

a. Khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng

Xét đường thẳng m có phương trùng với vectơ chỉ phương $\vec{e}_m$ đi qua điểm A có vectơ vị trí $\vec{r}_A$ (Hình 1.11). Giả thiết cần tìm khoảng cách từ điểm P có vectơ vị trí $\vec{r}_P$ đến m theo các vectơ $\vec{r}_A$, $\vec{r}_P$ và $\vec{e}_m$.



Hình 1.11. Khoảng cách d từ điểm P tới đường thẳng m.

Từ hình 1.11 ta thấy, khoảng cách từ điểm P tới đường thẳng m là

$$d=\left|\vec{r}_P-\vec{r}_A\right|\sin\theta. \quad (1.41)$$

Từ đây, sử dụng định nghĩa tích vectơ và tính chất của vectơ đơn vị ta rút ra được:

$$d=\left|\left(\vec{r}_P-\vec{r}_A\right)\times\vec{e}_m\right|. \quad (1.42)$$

Ví dụ 1.1: Tìm khoảng cách từ điểm $P(1,2,1)$ tới đường thẳng $\vec{r}=\vec{r}_A+\lambda\vec{b}$, với $\vec{r}_A=\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z$ và $\vec{b}=2\vec{e}_x-\vec{e}_y+3\vec{e}_z$.

Đối chiếu các dữ kiện đã cho theo công thức (1.33) ta thấy đường thẳng đã cho đi qua điểm (được xác định theo vectơ vị trí $\vec{r}_A$) có tọa độ (1, 1, 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$. Do đó, vectơ đơn vị $\vec{e}_m$ theo hướng vectơ chỉ phương này là:

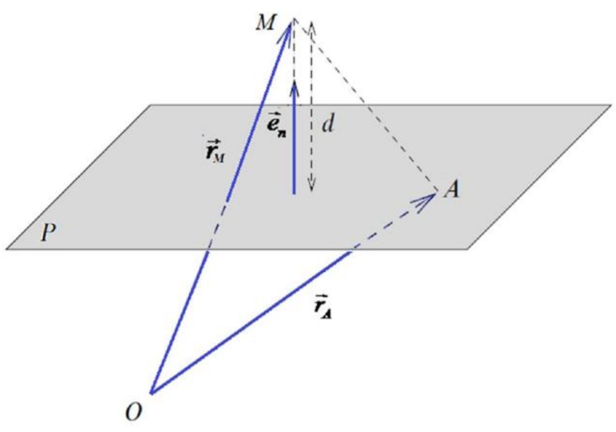
$$\vec{e}_m = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z\right),$$

còn vectơ vị trí $\vec{r}_P$ đi qua điểm *P* là $\vec{r}_P = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$.

Thay các biểu thức của $\vec{r}_P, \vec{r}_A$ và $\vec{e}_m$ trên đây vào (1.42) ta được kết quả $d = \sqrt{13/14}$.

b. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Xét điểm *M* có vectơ vị trí $\vec{r}_M$ và một mặt phẳng *P* có vectơ đơn vị theo hướng pháp tuyến $\vec{e}_n$ như trên hình 1.12.



Hình 1.12. Minh họa tính khoảng cách từ điểm *M* tới mặt phẳng *P*.

Để tìm khoảng cách *d* từ điểm *M* tới mặt phẳng *P*, ta lấy một điểm *A* bất kỳ (có vectơ vị trí $\vec{r}_A$) trên *P*. Lúc đó, khoảng cách *d* có giá trị bằng $\left|\overrightarrow{AM}.\vec{e}_n\right|$. Mặt khác, do $\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A - \vec{r}_M$ nên khoảng cách từ điểm *M* tới mặt phẳng *P* được tính:

$$d = \left|(\vec{r}_A - \vec{r}_M).\vec{e}_n\right|. \tag{1.43}$$

Ví dụ 1.2: Tìm khoảng cách từ điểm *M* = (1, 2, 3) tới mặt phẳng *P* chứa ba điểm *A*, *B* và *C* có các tọa độ: *A* = (0, 1, 0), *B* = (2, 3, 1), *C* = (5, 7, 2).

Gọi $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ và $\vec{r}_C$ tương ứng là các vectơ vị trí của các điểm *A*, *B* và *C*, ta có các hệ thức:

$$\vec{r}_A = \vec{e}_y;\ \vec{r}_B = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z;\ \vec{r}_C = 5\vec{e}_x + 7\vec{e}_y + 2\vec{e}_z.$$

Dễ nhận thấy hai vectơ $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$ và $(\vec{r}_C - \vec{r}_A)$ cùng nằm trong mặt phẳng *P*, với:

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z,\ \vec{r}_C - \vec{r}_A = 5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z.$$

Tích có hướng của hai vectơ này là một vectơ vuông góc với mặt phẳng *P* nên có thể xem như vectơ pháp tuyến $\vec{n}$:

$$\vec{n} = (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \times (5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z.$$

Do đó, vectơ đơn vị theo hướng pháp tuyến của $\vec{n}$ được tính:

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{3}(-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z).$$

Thay các biểu thức của $\vec{r}_A$, $\vec{r}_M$ và $\vec{e}_n$ vào (1.43) ta tìm được $d = \frac{5}{2}$.

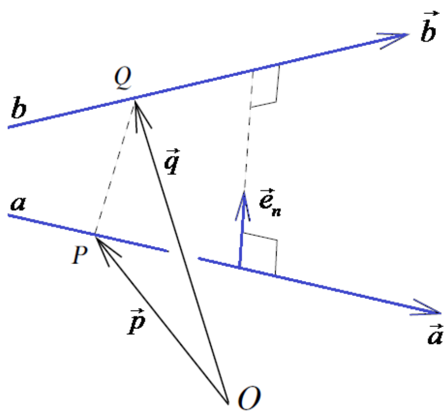
c. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Xét khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *a* và *b* tương ứng có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ như trên hình 1.13. Theo định nghĩa của tích vectơ, $\vec{a} \times \vec{b}$ là một vectơ vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Do đó, vectơ đơn vị pháp tuyến với cả hai đường thẳng này được tính:

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}. \tag{1.44}$$

Gọi *P* và *Q* là hai điểm bất kỳ tương ứng trên hai đường thẳng *a* và *b*. Khi đó, khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng chính là hình chiếu của $\overrightarrow{PQ}$ lên $\vec{e}_n$. Thay $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ và $\vec{e}_n$ từ (1.44) ta tính được khoảng cách *d*:

$$d = \left|\left(\vec{q} - \vec{p}\right).\vec{e}_n\right|. \tag{1.45}$$



Hình 1.13. Minh họa tính khoảng cách giữa hai đường thẳng.

1.6.3. Một số ứng dụng khác

Trong vật lí có những đại lượng được xác định bằng tích vô hướng của hai vectơ. Chẳng hạn, trong cơ học, công *A* sinh ra bởi lực $\vec{F}$ không đổi làm vật dịch chuyển theo một đoạn thẳng xác định bởi vectơ chuyển dời $\vec{S}$ được tính:

$$A = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{S}\right|\cos(\vec{F}, \vec{S}) = \vec{F}.\vec{S}. \tag{1.46}$$

Với định nghĩa này thì công của lực $\vec{F}$ không những phụ thuộc vào độ lớn của lực mà còn phụ thuộc vào cả hướng của nó nữa. Công có giá trị cực đại khi hướng tác động của lực song song với phương dịch chuyển, bằng không khi giá của lực vuông góc với phương dịch chuyển.

Trong lý thuyết điện từ cổ điển, một hạt mang điện tích q chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong một từ trường $\vec{B}$ sẽ chịu tác động một lực từ được xác định theo định luật Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}). \tag{1.47}$$

Khi xét chất điểm thực hiện chuyển động quay, vận tốc dài $\vec{v}$ của nó được xác định bằng tích vectơ của vận tốc góc $\vec{\omega}$ và bán kính vectơ vị trí $\vec{r}$ của nó đối với trục quay

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{1.48}$$

còn vectơ mô men động lượng $\vec{L}$ của chất điểm được xác định bởi

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{1.49}$$

với $\vec{p}$ là động lượng của chất điểm.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. Một tam giác có các cạnh *a, b* và *c*. Từ phép cộng vectơ, chứng minh công thức định lí hàm số cosin:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ (với α là góc tạo bởi các cạnh *a* và *b*).

1.2. Sử dụng ký hiệu vectơ để viết phương trình đường thẳng trong không gian ba chiều. Từ đó, tìm điều kiện để ba điểm *A, B* và *C* thẳng hàng.

1.3. Chứng minh rằng:

a) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$.

$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$.

b) $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$.

c) $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D}) = \begin{vmatrix} \vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C} \\ \vec{A}.\vec{D} & \vec{B}.\vec{D} \end{vmatrix}$.

d) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = \vec{B}[\vec{A}.(\vec{C}\times\vec{D})] - \vec{A}[\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{D})]$.

e) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C}) = [(\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\vec{A}]$.

1.4. Cho 3 điểm trong hệ tọa độ Descartes gồm: P(1, 2, 3); Q(2, 3, 5) và R (5, 6, 7).

a) Vận dụng tích vectơ, hãy tính diện tích tam giác PQR.

b) Chứng minh rằng 3 vectơ tạo bởi 3 cạnh của tam giác PQR là phụ thuộc tuyến tính. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ theo $\overrightarrow{PR}$ và $\overrightarrow{QR}$.

1.5. Cho 4 điểm trong hệ Descartes: P(1, 2, 3); Q(2, 3, 5); R (5, 6, 7) và M(3, 5, 7).

a) Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ và $\overrightarrow{PM}$ độc lập tuyến tính.

b) Tính thể tích của hình hộp tạo bởi các vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ và $\overrightarrow{PM}$.

1.6. Một điện tích điểm q_1 chuyển động với vận tốc $\vec{v}_1$ tạo ra từ trường có vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ được xác định: $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q_1 \frac{\vec{v}_1 \times \vec{r}}{r^2}$ với $\vec{r}$ là vectơ vị trí của điểm xác định giá trị của $\vec{B}$ đối với điện tích điểm q_1.

a) Chứng minh rằng lực từ $\vec{F}_2$ tác dụng lên điện tích điểm q_2 chuyển động trong từ trường của q_1 được xác định theo tích bội ba $\vec{F}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{r})$, với $\vec{v}_2$ là vận tốc của điện tích điểm q_2.

b) Xác định lực từ tác dụng lên điện tích q_1 dưới tác dụng của q_2.

1.7. Cho hai vectơ $\vec{a} = (3,6,9)$ và $\vec{b} = (-2,3,1)$.

a) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Tìm các hình chiếu a_b và b_a.

c) Tính diện tích hình bình hành có các cạnh *a* và *b*.

1.8. Chứng minh rằng, khoảng cách *d* từ đường thẳng có phương trình $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ tới mặt phẳng có vectơ đơn vị pháp tuyến $\vec{e}_n$ được xác định bởi

$$d = \left|(\vec{a} - \vec{r}).\vec{e}_n\right|.$$

1.9. Một đường thẳng *m* được cho bởi phương trình $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, trong đó:

$$\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z \text{ và } \vec{b} = 4\vec{e}_x + 5\vec{e}_y + 6\vec{e}_z.$$

Tìm tọa độ điểm *P* là giao điểm của đường thẳng *m* với mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$.

1.10. Cho hai hệ vectơ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ và $\{\vec{e}_x^{'}, \vec{e}_y^{'}, \vec{e}_z^{'}\}$. Giả thiết ban đầu hai hệ cơ sở này trung nhau, sau đó thực hiện quay hệ $\{\vec{e}_x^{'}, \vec{e}_y^{'}, \vec{e}_z^{'}\}$ xung quanh trục $z^{'}$ một góc 30^o ngược theo chiều kim đồng hồ.

a) Biểu diễn các vectơ cơ sở của hệ $\{\vec{e}_x^{'}, \vec{e}_y^{'}, \vec{e}_z^{'}\}$ theo các vectơ cơ sở của $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

b) Biểu diễn vectơ vị trí $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ trong hệ cơ sở $\{\vec{e}_x^{'}, \vec{e}_y^{'}, \vec{e}_z^{'}\}$.

Chương 2
GIẢI TÍCH VECTƠ

2.1. Trường vô hướng

2.1.1. Khái niệm

Trong nhiệt học, khi xét phân bố nhiệt ta thấy tại mỗi điểm của không gian sẽ ứng với một nhiệt độ T xác định nào đó. Nói chung, ứng với các điểm khác nhau sẽ cho ta các giá trị nhiệt độ khác nhau, nghĩa là T là hàm số của tọa độ

$$T = T(x,y,z). \tag{2.1}$$

Lúc đó, trong không gian mà chúng ta đang xem xét có một *trường nhiệt độ* được đặc trưng bởi hàm nhiệt độ $T = T(x,y,z)$. Nếu biết hàm phân bố nhiệt độ này ta sẽ biết được nhiệt độ tại từng điểm cụ thể.

Trong tĩnh điện học, một điện tích điểm q đặt trong chân không sẽ tạo ra xung quanh nó một điện trường có điện thế φ được xác định bởi công thức:

$$\varphi(x,y,z) = k\frac{q}{r} = k\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{2.2}$$

trong đó r, là khoảng cách từ điện tích điểm q đến điểmkhảo sát; k là hệ số phụ thuộc đơn vị đo. Ta nói rằng, phần không gian xung quanh q xác định một *trường điện thế* đặc trưng bởi hàm thế $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

Vì nhiệt độ hay điện thế chỉ biểu diễn thuần tuý bằng một số nên chúng là những đại lượng vô hướng và trường nhiệt độ hay điện thế được gọi là những *trường vô hướng*. Một cách khái quát ta có định nghĩa:

Trường vô hướng là phần không gian mà tại mỗi điểm $M(x,y,z)$ trong đó ứng với một đại lượng vô hướng được xác định theo hàm vô hướng:

$$u = u(M) = u(x,y,z). \tag{2.3}$$

Cho một trường vô hướng tức là cho quy luật xác định hàm vô hướng u được xác định trên miền không gian cụ thể nào đó. Lúc đó, để nghiên cứu các đặc trưng của trường ta chỉ cần nghiên cứu hàm u.

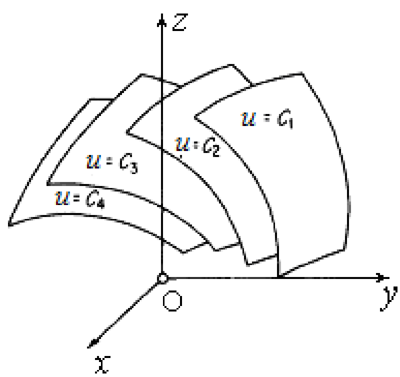
Nếu hàm vô hướng u chỉ phụ thuộc vào hai thành phần tọa độ (chẳng hạn $u = u(x,y)$ thì trường xác định bởi u được gọi là *trường phẳng*. Nếu hàm u không phụ thuộc vào thời gian thì trường được gọi là *trường dừng*, trái lại thì trường được gọi là *trường không dừng* hay *trường thay đổi*.

Trường vô hướng được gọi là *liên tục* tại điểm M nếu hàm vô hướng $u(M)$ liên tục tại điểm đó. Nếu không chú thích gì thêm thì các trường vô hướng đề cập trong chương này được xem là liên tục trong miền xác định của hàm vô hướng u. Ngoài ra, khi xét những trường vô hướng cụ thể trong vật lí, chúng ta gọi theo tên riêng của nó.Ví dụ: *trường điện thế*, *trường nhiệt độ*, *trường thế hấp dẫn*, v.v.

Trên phương diện hình học, chúng ta mô tả trường vô hướng thông qua khái niệm *mặt mức* hay còn gọi là *mặt đẳng trị*. Ta định nghĩa *tập các điểm M* (x,y,z) *của trường mà hàm vô hướng* $u(M)$ *lấy cùng một giá trị C nào đó, được gọi là mặt mức hay mặt đẳng trị của trường*. Phương trình của mặt mức là:

$$u = u(x,y,z) = C. \qquad (2.4)$$

Vì C có thể lấy các trị số khác nhau nên có thể vẽ được vô số các mặt mức. Mặt khác, do hàm vô hướng u được giả thiết là đơn trị nên các mặt mức của trường sẽ không giao nhau (Hình 2.1).



Hình 2.1. Các mặt mức của trường vô hướng $u = u\,(x, y, z)$.

Ví dụ 2.1: Tìm các mặt mức của trường điện thế cho bởi hàm vô hướng có dạng (2.2).

Ta có: thực hiện đưa (2.2) về dạng (2.4):

$$x^2 + y^2 + z^2 = (kq/C)^2, \tag{2.5}$$

với C là hằng số tùy ý chọn. Biểu thức (2.5) cho thấy các mặt mức trong trường hợp này là những mặt cầu đồng tâm, bán kính bằng kq/C.

Như vậy, trường vô hướng không thay đổi khi đi trong cùng một mặt mức nhưng thay đổi khi đi từ mặt mức này sang mặt mức khác. Trong vật lí, chúng ta quan tâm đến tốc độ thay đổi của trường theo các hướng trong không gian, đặc biệt là *hướng* mà dọc theo đó *tốc độ thay đổi của trường lớn nhất*.

2.1.2. Đạo hàm theo hướng

Ta biết rằng, các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ cho biết tốc độ thay đổi của trường vô hướng u tương ứng theo các hướng Ox, Oy, Oz trong không gian. Mở rộng cho trường hợp cần xem xét tốc độ thay đổi của trường theo một hướng bất kì, ta có thể khảo sát đạo hàm của u theo hướng đó.

a. Định nghĩa:

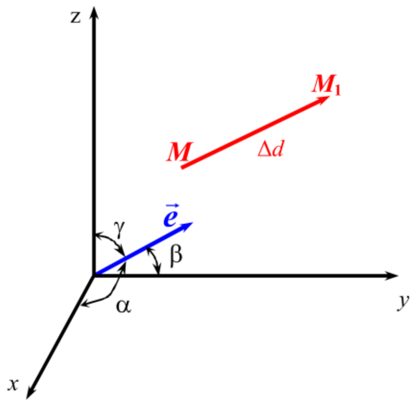
Xét một hướng trong không gian được đặc trưng bởi vectơ chỉ phương $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ và xét hàm $u = u(M) = u(x,y,z)$. Chọn điểm M_1 gần M sao cho $\overrightarrow{MM_1}$ song song với $\vec{e}$ như trên hình 2.2.

Thực hiện đặt:

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \Delta d,\ x_1 - x = \Delta x,\ y_1 - y = \Delta y,\ z_1 - z = \Delta z.$$

Khi đó:

$$x_1 = x + \Delta d\cos\alpha,\ y_1 = y + \Delta d\cos\beta,\ z_1 = z + \Delta d\cos\gamma.$$



Hình 2.2. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MM_1}$, vectơ đơn vị $\vec{e}$ và các góc chỉ phương.

Người ta định nghĩa [2]:

$$\lim_{\Delta d \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta d} = \lim_{\Delta d \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta d}$$
$$= \lim_{\Delta d \to 0} \frac{u(x + \Delta d \cos\alpha, y + \Delta d \cos\beta, z + \Delta d \cos\gamma) - u(x, y, z)}{\Delta d}$$

là *đạo hàm của hàm u tại điểm M theo hướng của vectơ* $\vec{e}$ (nếu giới hạn này tồn tại). Lúc đó, ta kí hiệu:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{\Delta d \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta d}. \qquad (2.6)$$

Đặc biệt, khi $\vec{e} \,//\, Ox$ thì cosα = 1, cosβ = cosγ = 0, $\Delta d = \Delta x$, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Tương tự, khi $\vec{e} \,//Oy$ thì $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial y}$ và khi $\vec{e} \,//Oz$ thì $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial z}$. Nghĩa là các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ là các đạo hàm theo các hướng đặc biệt song song với *Ox, Oy, Oz*. Vì tại một điểm có rất nhiều hướng đi qua nên tại một điểm cũng có rất nhiều đạo hàm theo hướng. Để tính đạo hàm theo hướng bất kì ta có định lí:

b. Định lí:

Nếu hàm số $u = u(x,y,z)$ khả vi tại điểm $M(x,y,z)$ thì đạo hàm theo hướng $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ tại điểm đó sẽ tồn tại và được tính theo công thức :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma . \qquad (2.7)$$

Thực vậy, do giả thiết u khả vi tại điểm M nên ta có:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + O(\Delta d),$$

trong đó, $O(\Delta d)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn $\Delta d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, nghĩa là

$$\lim_{\Delta d \to 0} \frac{O(\Delta d)}{\Delta d} = 0.$$

Mặt khác:$\Delta x = \Delta d \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta d \cos\beta$, $\Delta z = \Delta d \cos\gamma$. Do đó:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta d\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta d\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta d\cos\gamma + O(\Delta d).$$

Từ các kết quả trên ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{\Delta d \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta d} = \lim_{\Delta d \to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma + \frac{O(\Delta d)}{\Delta d}\right),$$

hay

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Ví dụ 2.2: Tìm đạo hàm của hàm số $u=xyz$ tại điểm $M = (5, 1, 2)$ theo hướng của vectơ $\vec{e}$ song song $\overrightarrow{MM_1}$. Biết $M_1 = (7, -1, 3)$.

Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = zx,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy.$$

Do đó tại điểm $M(5, 1, 2)$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 10, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 6.$$

Mặt khác, vì $\overrightarrow{MM_1}$ ={7-5, -1-1, 3-2}= {2, -2, 1} nên

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}, \ \cos\beta = -\ \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Vậy, theo (2.7) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = 2.\frac{2}{3} + 10.\frac{-2}{3} + 5.\frac{1}{3} = -\frac{11}{3}.$$

Dấu trừ (-) chứng tỏ hàm số u là giảm theo hướng $\vec{e}$. Vì vậy, nếu đổi chiều của vectơ $\vec{e}$ thì đạo hàm của u theo hướng $\vec{e}$ lúc này sẽ dương. Ta minh họa điều này bởi ví dụ 2 dưới đây.

Ví dụ 2.3: Tìm đạo hàm của hàm số $u=xyz$ tại điểm $M(5, 1, 2)$ theo hướng $\vec{e}$ nối từ điểm M đến điểm M_2 đối xứng với M_1 qua điểm M trong ví dụ 2.2.

Ta thấy điểm M_2 đối xứng với M_1 (7, -1, 3) qua điểm $M(5, 1, 2)$ nên các cosin chỉ phương lúc này đổi dấu. Nghĩa là:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = +\frac{2}{3}, \cos\gamma = -\ \frac{1}{3}.$$

Theo (2.7) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = 2.\frac{-2}{3} + 10.\frac{+2}{3} + 5.\frac{-1}{3} = +\frac{11}{3}.$$

2.1.3. Gradient của trường vô hướng

Như đã trình bày ở mục trên, tốc độ thay đổi này không những phụ thuộc vào vị trí ta xét mà còn phụ thuộc vào hướng khảo sát. Nghĩa là, tại mỗi điểm cho trước sẽ tồn tại hướng đặc biệt trong không gian mà hướng theo đó thì tốc độ thay đổi của trường là lớn nhất, nghĩa là đạo hàm của hàm $u(x,y,z)$ đó là lớn nhất.

a. Định nghĩa gradient:

Như chúng ta đã biết:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,,$$

trong đó: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ tương ứng là các cosin chỉ phương của vectơ đơn vị $\vec{e}$:

$$\vec{e} = (\cos\alpha)\vec{e}_x + (\cos\beta)\vec{e}_y + (\cos\gamma)\vec{e}_z\,.$$

Bằng cách định nghĩa vectơ $\vec{g}$ được xác định

$$\vec{g} = \vec{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.8}$$

ta thấy (bằng cách sử dụng định nghĩa của tích vô hướng) $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ bằng tích vô hướng của hai vectơ $\vec{g}$ và $\vec{e}$. Nghĩa là:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \vec{g}.\vec{e} = |\vec{g}||\vec{e}|\cos(\vec{g},\vec{e}) = |\vec{g}|\cos(\vec{g},\vec{e})\,. \tag{2.9}$$

Lúc đó, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \vec{e}}\right|$ lớn nhất khi $|\cos(\vec{g}, \vec{e})| = 1$, tức là khi phương của $\vec{e}$ trùng với phương của $\vec{g}$. Người ta gọi $\vec{g}$ là *vectơ gradient của trường vô hướng u* và kí hiệu là $\mathrm{grad}u$:

$$\mathrm{grad}u = \vec{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}\,, \tag{2.10}$$

$$\max\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}\right| = |\mathrm{grad}u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{2.11}$$

Trong giải tích vectơ chúng ta sử dụng toán tử "*nabla*", kí hiệu là ∇:

$$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{2.12}$$

để biểu diễn một số hệ thức quan trọng trong giải tích vectơ. Khi đó biểu thức của gradient trong (2.4) được viết lại ngắn gọn như sau:

$$\text{grad}u = \nabla u. \tag{2.13}$$

Nếu ta kí hiệu $\vec{r}$ và $\vec{r}_1$ là các vectơ vị trí tương ứng của các điểm M và M_1 bởi

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_1 = (x+dx)\vec{e}_x + (y+dy)\vec{e}_y + (z+dz)\vec{e}_z$$

thì vi phân hàm trường vô hướng (khi ta chuyển M_1 tới M) bằng:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{2.14}$$

Sử dụng định nghĩa tích vô hướng ta có

$$du = \text{grad}u.\, d\vec{r} = \nabla u.\ d\vec{r}\ , \tag{2.15}$$

hay

$$\text{grad}u = \frac{du}{d\vec{r}}. \tag{2.16}$$

Ví dụ 2.4: Xác định gradient của trường điện thế:

$$\varphi(x,y,z) = k\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

và tìm tốc độ thay đổi lớn nhất của trường.

Ta có:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -k\frac{qx}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -k\frac{qx}{r^3}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -k\frac{qy}{r^3}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -k\frac{qz}{r^3}$$

Do đó

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = -k\frac{q(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z)}{r^3} = -k\frac{q\vec{r}}{r^3}. \tag{2.17}$$

Tốc độ thay đổi lớn nhất của trường là

$$\max\left|\frac{\partial\varphi}{\partial e}\right| = |\text{grad}\varphi| = k\frac{|q|}{r^2}. \tag{2.18}$$

Ta biết mặt mức của trường điện thế này là những mặt cầu đồng tâm nên vectơ $\text{grad}\varphi = -k\dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ vuông góc với các mặt mức.

Trong trường hợp tổng quát, khi u là một trường bất kì ta vẫn có điều đó, nghĩa là: *nếu gradient của trường vô hướng* $u = u(x,y,z)$ *tại điểm* M_0 *là khác không thì nó vuông góc với mặt mức đi qua điểm đó và hướng theo chiều tăng của trường*. Thực vậy, như chúng ta đã biết vi phân (độ biến thiên) của trường vô hướng u khi ta dịch chuyển từ điểm M_0 tới điểm M_1 theo một vi phân vectơ dịch chuyển $d\vec{r}$ bất kì trên mặt mức sẽ bằng không. Kết hợp với (2.16) ta có $du = \text{grad}u.\, d\vec{r} = 0$. Nhưng do giả thiết grad$u$ khác không tại M_0 nên biểu thức này chỉ thoả mãn khi grad$u$ vuông góc với $d\vec{r}$. Điều này có nghĩa là grad$u$ vuông góc với mặt mức tại điểm M_0. Mặt khác, nếu $du > 0$ (u tăng) thì $du = \text{grad}u.\, d\vec{r} > 0$, ngược lại nếu u giảm thì $du = \text{grad}u.\, d\vec{r} < 0$. Từ đây ta rút ra kết luận: *vectơ gradu hướng theo chiều tăng của hàm u*.

Tính chất của gradient

Từ biểu thức (2.16), chúng ta dễ dàng suy ra một số tính chất quan trọng của gradient:

1. $\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad}\, u_1 + \text{grad}\, u_2$. (2.19)
2. $\text{grad}(Cu) = C\,\text{grad}\, u$, $C = constant$. (2.20)
3. $\text{grad}(u_1u_2) = u_1\text{grad}\, u_2 + u_2\text{grad}\, u_1$. (2.21)
4. $\text{grad}\, f(u) = f'(u)\,\text{grad}(u)$. (2.22)
5. $\text{grad}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v.\text{grad}u - u.\text{grad}v}{v^2}$, $v \neq 0$. (2.23)
6. $\text{grad}(u + C) = \text{grad}u + \text{grad}C = \text{grad}u$. (2.24)

Tính chất (6) cho thấy, nếu biết trước giá trị của *gradu* thì hàm u có thể được xác định sai khác một hằng số cộng C.

Ngoài các tính chất trên đây, gradient còn có tính chất bất biến khi tịnh tiến hay quay hệ tọa độ (biến đổi trực giao).

Thực vậy, khi tịnh tiến hệ tọa độ thì các vectơ cơ sở $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ không thay đổi và ta có quan hệ giữa các tọa độ (x_1, y_1, z_1) của hệ mới với các tọa độ (x, y, z) của hệ ban đầu như sau:

$$x_1 = x + a,\ y_1 = y + b,\ z_1 = z + c, \tag{2.25}$$

trong đó a, b, c là các hằng số đặc trưng cho phép tịnh tiến. Biểu diễn hàm vô hướng $u(x,y,z)$ bằng các tọa độ mới x_1, y_1, z_1 ta có:

$$u(x,y,z) = u(x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c) = u_1(x_1, y_1, z_1).$$

Do đó:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1}.$$

Như vậy

$$\mathrm{grad}u = \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} = \vec{e}_x \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \vec{e}_y \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \vec{e}_z \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \tag{2.26}$$

tức là gradient không thay đổi dạng qua phép tịnh tiến.

Để chứng minh tính bất biến của gradient qua phép quay, trước hết ta biểu diễn phép quay hệ tọa độ qua phép biến đổi trực giao bởi ma trận:

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

trong đó, tính trực giao được thể hiện qua hệ thức đúng với mọi i, k:

$$\sum_{l=1}^{3} a_{il} a_{kl} = \delta_{ik}, \tag{2.28}$$

với δ_{ik} là hàm delta Kronecker và được định nghĩa như sau [6]:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{2.29}$$

Lúc đó ta có

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} \vec{e}_x^1 \\ \vec{e}_y^1 \\ \vec{e}_z^1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

trong đó O^{T} là ma trận chuyển vị của O, tức là:

$$O^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Ta viết dạng tường minh như sau:

$$x = a_{11}x_1 + a_{21}y_1 + a_{31}z_1,$$

$$y = a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{32}z_1,$$

$$z = a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}z_1.$$

Từ đó ta có

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_1} = \frac{\partial u}{\partial x}a_{11} + \frac{\partial u}{\partial y}a_{12} + \frac{\partial u}{\partial z}a_{13},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial x}a_{21} + \frac{\partial u}{\partial y}a_{22} + \frac{\partial u}{\partial z}a_{23},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{\partial u}{\partial x}a_{31} + \frac{\partial u}{\partial y}a_{32} + \frac{\partial u}{\partial z}a_{33}.$$

Ở dạng ma trận ta có thể viết

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).O^T,$$

tức là

$$\mathrm{grad}u_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)\begin{pmatrix} \vec{e}_x^1 \\ \vec{e}_y^1 \\ \vec{e}_z^1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)O^T O \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}.$$

Mặt khác do tính trực giao của O nên ta có

$$O^{\mathrm{T}}O = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.32)$$

là ma trận đơn vị. Do vậy

$$\mathrm{grad}u_1 = \vec{e}_x^{\,1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \vec{e}_y^{\,1}\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \vec{e}_z^{\,1}\frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \vec{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{grad}u, \quad (2.33)$$

tức là gradient bất biến qua phép quay hệ tọa độ.

2.2. Trường vectơ

2.2.1. Trường vectơ

a. Định nghĩa

Trường vectơ là phần không gian mà tại mỗi điểm $M(x,y,z)$ trong đó ứng với một vectơ được xác định:

$$\vec{A} = \vec{A}(M) = \vec{A}(x,y,z). \qquad (2.34)$$

Cho một trường vectơ tức là cho hàm vectơ $\vec{A}(x,y,z)$ được xác định trên miền không gian cụ thể. Do đó, để nghiên cứu các đặc trưng của trường ta chỉ cần nghiên cứu hàm vectơ $\vec{A}$.

Trong vật lí học ta gặp rất nhiều đại lượng có hướng được mô tả thông qua trường vectơ. Chẳng hạn:

- Khi xét chuyển động của chất lỏng, vận tốc $\vec{v}$ của phân tử chất lỏng tại điểm M được biểu diễn: $\vec{v} = \vec{v}(M) = \vec{v}(x,y,z)$. Như vậy, trong chất lỏng ta có một trường vectơ vận tốc $\vec{v}$.

- Xét điện tích điểm q đặt tại gốc tọa độ O. Tại mỗi điểm $M(x,y,z)$ thuộc phần không gian xung quanh O tồn tại một vectơ cường độ điện trường $\vec{E}$ được xác định theo biểu thức:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q\vec{r}}{r^3}, \text{ với } \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \qquad (2.35)$$

Như ta đã biết, gradient của một vô hướng là một vectơ. Vì vậy, khi cho một trường vô hướng thì ta cũng có tương ứng một trường vectơ thông qua phép biến đổi gradient.

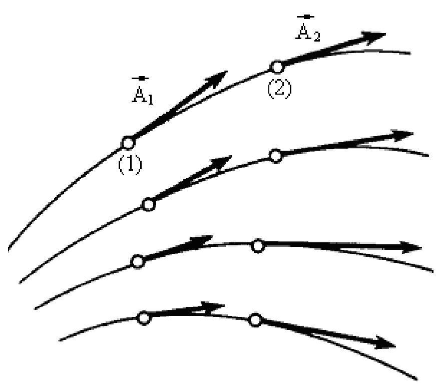
Người ta cũng định nghĩa *trường vectơ liên tục* tại điểm M_o nào đó nếu hàm vectơ $\vec{A}(x,y,z)$ liên tục tại điểm đó. Nếu như không chú thích gì thêm thì các trường vectơ mà ta đề cập trong chương này được xem là liên tục.

b. Quỹ đạo của trường vectơ

Để biểu diễn hình học trường vectơ người ta dùng khái niệm *quỹ đạo của trường vectơ* (hay còn gọi là *đường vectơ*), *là các đường vẽ trong trường vectơ sao cho tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó có phương trùng với vectơ* $\vec{A}$ *tại điểm đó* (Hình 2.3), *chiều của đường vectơ là chiều của vectơ* $\vec{A}$.

Cần chú ý, do tính chất đơn trị của hàm vectơ nên tại mỗi điểm của trường chỉ có một đường vectơ duy nhất đi qua và các đường vectơ của trường không cắt nhau. Chúng ta quy ước những miền mà biên độ của trường vectơ lớn thì các đường vectơ được vẽ gần nhau, những miền có biên độ trường vectơ bé thì vẽ các vectơ xa nhau.

Trong vật lí, đối với các trường vectơ khác nhau thì đường vectơ tương ứng của nó còn có những tên gọi riêng. Chẳng hạn đối với điện trường ta có đường sức điện trường, đối với trường vận tốc của chất lỏng ta có khái niệm đường dòng.



Hình 2.3. Minh họa các đường vectơ của trường vectơ $\vec{A}$.

Xét trường vectơ có hàm vectơ

$$\vec{A} = \vec{A}(M) = A_x(x,y,z)\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\vec{e}_z. \qquad (2.36)$$

Để tìm phương trình của các đường vectơ, trước hết ta viết phương trình dưới dạng tham số:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (2.37)$$

Lúc đó tiếp tuyến tại điểm $M(x,y,z)$ có các hệ số chỉ phương là $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Kết hợp với định nghĩa ta thu được [2]:

$$\frac{x'(t)}{A_x} = \frac{y'(t)}{A_y} = \frac{z'(t)}{A_z} \text{ hay } \frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}\ . \qquad (2.38)$$

Hệ (2.38) được gọi là hệ phương trình vi phân của các đường vectơ. Giải hệ này ta sẽ tìm được phương trình các đường vectơ của trường.

Ví dụ 2.5: Tìm các đường sức của vectơ cường độ trường:

$$\vec{E} = k\frac{q\vec{r}}{r^3}. \qquad (2.39)$$

Ta có:

$$A_x = k\frac{qx}{r^3},\ A_y = k\frac{qy}{r^3},\ A_z = k\frac{qz}{r^3}. \qquad (2.40)$$

Theo (2.38), hệ phương trình vi phân của các đường vectơ của điện trường trên là

$$\frac{dx}{k\frac{qx}{r^3}} = \frac{dx}{k\frac{qy}{r^3}} = \frac{dx}{k\frac{qz}{r^3}}, \qquad (2.41)$$

hay

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}. \qquad (2.42)$$

Tích phân các vế cho các phương trình này ta được:

$$lnC_1x = lnC_2y = lnC_3z\ , \qquad (2.43)$$

hay

$$\frac{x}{a_1}=\frac{y}{a_2}=\frac{z}{a_3}; \quad a_i=\frac{1}{C_i}=const; \quad i=1,\,2,\,3. \qquad (2.44)$$

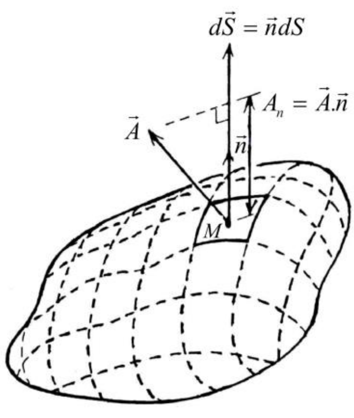
Đây là phương trình của một họ đường thẳng đi qua O. Vậy các đường sức điện trường trong trường hợp này là một họ đường thẳng đi qua điện tích điểm q.

2.2.2. Thông lượng và dive của một trường vectơ

a. Thông lượng của một trường vectơ

Xét một mặt trơn hữu hạn có diện tích S đặt trong một trường vectơ $\vec{A}$ liên tục nào đó. Ta chọn trên mặt này một hướng xác định và gọi là hướng dương, khi đó hướng ngược lại được gọi là hướng âm. Nếu S là mặt kín thì người ta thường quy ước hướng dương là hướng từ trong ra ngoài. Mặt S được chọn như vậy gọi là mặt định hướng.

Ta chia S thành nhiều phần, mỗi phần có diện tích dS vô cùng nhỏ (gọi là *vi phân diện tích*) sao cho trường vectơ $\vec{A}$ được xem là không đổi trên mỗi phần đó. Xét vi phân diện tích dS nằm trong mặt S (Hình 2.4) và gọi $\vec{n}$ là vectơ đơn vị trên phương pháp tuyến tại điểm M nằm trong dS.



Hình 2.4. Mặt S và các vectơ vi phân diện tích $d\vec{S}=\vec{n}dS$.

Đại lượng

$$d\Phi = \vec{A}.\vec{n}dS = \vec{A}.d\vec{S} \tag{2.45}$$

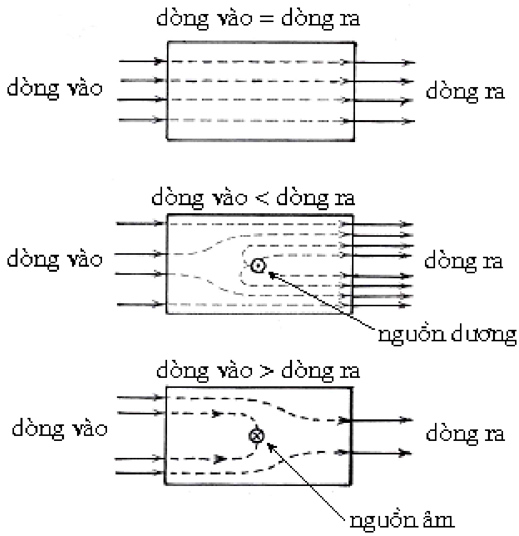
được gọi là *thông lượng của trường vectơ* $\vec{A}$ (không đổi) *gửi qua vi phân diện tích dS*, trong đó $d\vec{S} = \vec{n}dS$ là *vi phân vectơ diện tích*.

Từ định nghĩa trên, ta có thể mở rộng cho tính *thông lượng của trường vectơ* $\vec{A}$ *gửi qua toàn mặt S bất kỳ* theo công thức:

$$\Phi = \iint_{(S)} d\Phi = \iint_{(S)} \vec{A}d\vec{S}\ . \tag{2.46}$$

Dựa vào tính chất của tích vô hướng, ta thấy chỉ có thành phần vuông góc với bề mặt *S* của $\vec{A}$ mới đóng góp vào thông lượng (2.46).

Theo định nghĩa ở trên thì Φ là một đại lượng vô hướng, nó phụ thuộc vào hình dạng của mặt *S* và hướng của vectơ $\vec{A}$ trên toàn mặt đó. Khi $\vec{A}$ hướng ra ngoài mặt *S* thì thông lượng dương, nếu hướng vào bên trong thể tích thì thông lượng âm. Nếu trong thể tích *V* giới hạn bởi bề mặt *S* không có một nguồn nào thì thông lượng vào sẽ bằng thông lượng ra, tức là thông lượng tổng cộng triệt tiêu. Sự có mặt của nguồn dương trong thể tích *V* sẽ dẫn đến $\Phi > 0$, còn nguồn âm sẽ dẫn đến $\Phi < 0$. Hình 2.5 minh họa cho các trường hợp của nguồn âm, nguồn dương của chất lưu chảy qua ống dòng.



Hình 2.5. Thông lượng trường vectơ khi có mặt các nguồn.

b. Dive của một trường vectơ

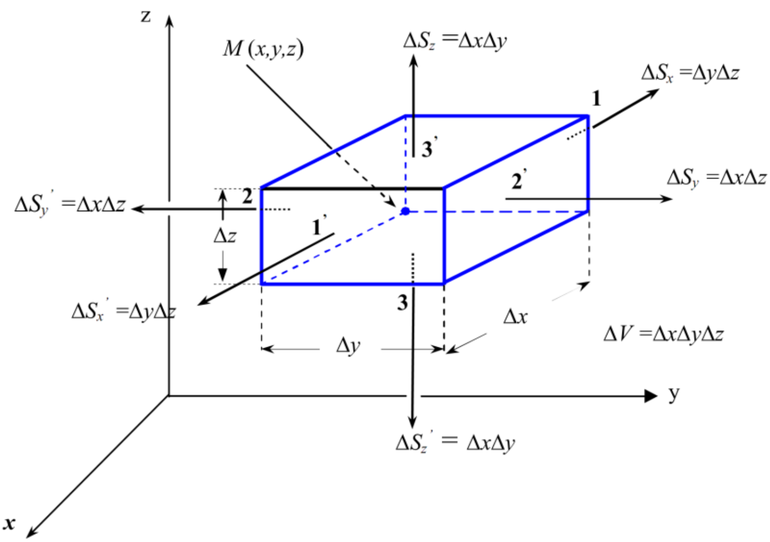
Định nghĩa: Trong trường vectơ $\vec{A}$, xét điểm M được bao quanh bằng một mặt kín nhỏ có diện tích ΔS ứng với thể tích ΔV. Theo định nghĩa, thông lượng Φ của trường vectơ $\vec{A}$ gửi qua mặt kín ΔS được tính:

$$\Delta\Phi = \oiint\limits_{(S)} A_n dS = \oiint\limits_{(S)} \vec{A}d\vec{S} \qquad (2.47)$$

Nhìn chung, khi giảm dần ΔS (ΔV cũng giảm theo) thì $\Delta\Phi$ cũng giảm. Lúc đó, *tỷ số $\Delta\Phi/\Delta V$ khi ΔV tiến đến không (tất cả các điểm trên S đều tiến về M) sẽ là một con số nào đó phụ thuộc vào dáng điệu của vectơ $\vec{A}$ ở lân cận nhỏ của điểm M và đặc trưng cho mức độ "chảy" của trường ra khỏi lân cận điểm này*. Người ta gọi con số này là *divergence* (viết tắt là *dive*) của trường vectơ $\vec{A}$ tại điểm M và kí hiệu div $\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint\limits_{(S)}\vec{A}d\vec{S}}{\Delta V}. \qquad (2.48)$$

Từ biểu thức định nghĩa này ta thiết lập công thức dạng tường minh cho div $\vec{A}$ trong hệ tọa độ Descartes.



Hình 2.6. Biểu diễn các phần tử bề mặt của mặt kín ΔS hình hộp chữ nhật.

Để đơn giản, ta xét mặt kín ΔS là mặt bao của một hình hộp chữ nhật có thể tích $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ rất bé, có đỉnh tại điểm $M(x, y, z)$ đang xét, độ dài các cạnh là $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (Hình 2.6).

Để tính div$\vec{A}$, ta tính thông lượng $\Delta\Phi$ gửi qua toàn bộ mặt ΔS sau đó thay vào (2.48) và thực hiện phép lấy giới hạn. Để tính thông lượng $\Delta\Phi$, do tính chất đối xứng của hình hộp nên ta sẽ tính thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ gửi qua từng cặp mặt đối diện nhau.

Tại mặt **1**, hình chiếu của $\vec{A}$ lên phương pháp tuyến của mặt này là -$A_x(x,y,z)$ (ta lấy dấu trừ vì pháp tuyến của mặt này ngược chiều với hướng dương của trục Ox). Do đó, thông lượng vectơ $\vec{A}$ gửi qua mặt **1** là -$A_x(x,y,z)\Delta y\Delta z$. Còn hình chiếu của $\vec{A}$ lên phương pháp tuyến với mặt **1'** (mặt đối diện với **1)** sẽ là $A_x(x+\Delta x,y,z)$, do đó thông lượng gửi qua mặt này là: $A_x(x+\Delta x,y,z)\Delta y\Delta z$. Thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ gửi qua cặp mặt **1** và **1'** là:

$$[A_x(x+\Delta x,y,z) - A_x(x,y,z)]\Delta y\Delta z. \qquad (2.49a)$$

Tương tự, thông lượng gửi qua các cặp mặt **2 - 2'** và **3 - 3'** sẽ là:

$$[A_y(x,y+\Delta y,z) - A_y(x,y,z)]\Delta x\Delta z, \qquad (2.49b)$$

$$[A_z(x,y,z+\Delta z) - A_z(x,y,z)]\Delta x\Delta y. \qquad (2.49c)$$

Vậy, thông lượng tổng cộng gửi qua toàn bộ mặt kín S của hình hộp là:

$$\Phi = [A_x(x+\Delta x,y,z) - A_x(x,y,z)]\Delta y\Delta z + [A_y(x,y+\Delta y,z) -$$

$$-A_y(x,y,z)]\Delta x\Delta z + [A_z(x,y,z+\Delta z) - A_z(x,y,z)]\Delta x\Delta y. \qquad (2.50)$$

Chia cả hai vế cho thể tích hình hộp $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ rồi chuyển qua giới hạn $\Delta V \to 0$ (khi tất cả các Δx, Δy, Δz đồng thời tiến về 0) ta được:

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{A_x(x+\Delta x,y,z)-A_x(x,y,z)}{\Delta x}\right)$$

$$+\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{A_y(x,y+\Delta y,z)-A_y(x,y,z)}{\Delta y}\right)$$

$$+\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{A_z(x,y,z+\Delta z)-A_z(x,y,z)}{\Delta z}\right). \qquad (2.51)$$

Hay

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (2.52)$$

Biểu thức (2.52) là dive của trường vectơ $\vec{A}$ tại điểm (x, y, z) trong hệ tọa độ Descartes ba chiều Oxyz.

Bằng cách dùng toán tử nabla ∇ với quy ước rằng toán tử này chỉ tác dụng lên tất cả các vectơ đứng sau nó và không tác dụng lên các vectơ đứng trước nó, ta có (2.52) tương đương với tác dụng vô hướng của ∇ với $\vec{A}$, nghĩa là:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla\vec{A}. \qquad (2.53)$$

Phép tính dive có nhiều ứng dụng trong vật lí như tính thông lượng của một trường vectơ. Ngoài ra, qua biến đổi tích phân khi tính thông lượng người ta còn dẫn đến các phương trình Maxwell trong điện động lực học.

Ví dụ 2.6: Tính dive của trường vectơ cường độ điện trường

$$\vec{E} = k\frac{q\vec{r}}{r^3} .$$

Trước hết, ta tính các thành phần hình chiếu của vectơ cường độ điện trường:

$$E_x = k\frac{qx}{r^3}, \quad E_y = k\frac{qy}{r^3}, \quad E_z = k\frac{qz}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ;$$

Thực hiện tính các đạo hàm riêng ta được:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}), \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = kq(\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}), \frac{\partial E_z}{\partial z} = kq(\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}) .$$

Thay vào (2.53) ta thu được $\mathrm{div}\vec{E} = 0$.

Tính chất:

Với λ_1 và λ_2 là các hằng số, ta có:

$$\mathrm{div}(\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B}) = \lambda_1 \mathrm{div} \vec{A} + \lambda_2 \mathrm{div} \vec{B} . \tag{2.54}$$

Tính chất *tuyến tính* này dễ dàng được kiểm chứng bằng cách thay $\vec{A}$ trong (2.53) bởi $(\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B})$ rồi tiến hành tính trực tiếp, đồng thời chú ý rằng dive của một hằng số luôn bằng không. Nếu thay $\vec{A}$ trong (2.53) bởi $u\vec{A}$, với *u* là một trường vô hướng ta thu được tính chất sau:

$$\mathrm{div}(u\vec{A}) = u\,\mathrm{div}\vec{A} + \vec{A}\,\mathrm{grad}u. \tag{2.55}$$

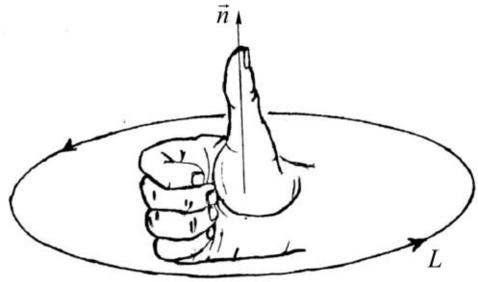
2.2.3. Rota của một trường vectơ

a. Định nghĩa

Trong trường vectơ $\vec{A}$ ta xét một vòng kín nhỏ *L* nằm trong mặt phẳng có pháp tuyến $\vec{n}$ (Hình 2.7). Người ta định nghĩa *lưu thông* (còn gọi là lưu số) vectơ $\vec{A}$ dọc theo đường cong kín (chu tuyến) *L* là đại lượng *Q* được tính theo tích phân đường loại hai [2]:

$$Q = \oint_{(L)} \vec{A}.d\vec{l}\ , \tag{2.56}$$

với $d\vec{l}$ là vi phân của vectơ dịch chuyển trên *L*.



Hình 2.7. Minh họa chiều dương của chu tuyến.

Lưu thông của trường vectơ phụ thuộc không chỉ vào $\vec{A}$ và *L* mà còn phụ thuộc vào cả hướng của chu tuyến *L*.Khi thay đổi hướng của chu tuyến (đổi chiều $d\vec{l}$) thì lưu thông đổi dấu. Nếu vectơ $\vec{A}$ vuông góc với tiếp tuyến của *L* tại điểm đó thì $\vec{A}\cdot d\vec{l} = 0$.

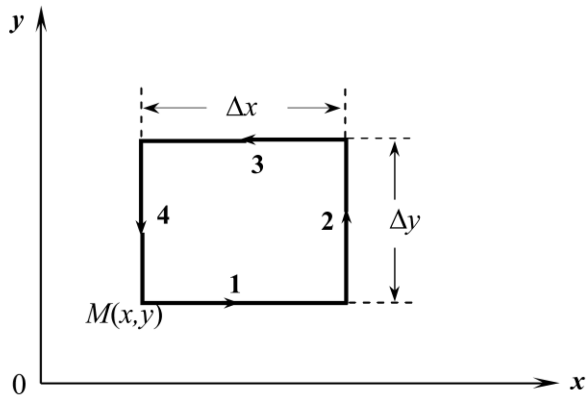
Xét điểm *M* nằm trong trường vectơ $\vec{A}$ và bao quanh nó bằng đường cong kín *L* vô cùng bé. Diện tích của miền được giới hạn bởi *L* là ΔS. Tỷ số $\dfrac{Q}{\Delta S}$ chính là mật độ lưu thông trung bình của trường vectơ $\vec{A}$ trên diện tích ΔS. Ta đưa vào định nghĩa *rotation* (viết tắt là *rota*) của vectơ $\vec{A}$ tại điểm *M*(*x*, *y*, *z*) và được kí hiệu là rot$\vec{A}$ đặc trưng cho độ *xoáy* của trường tại điểm *M* như sau:

$$\mathrm{rot}_n\vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{(L)} \vec{A}d\vec{l}}{\Delta S}\ , \tag{2.57}$$

trong đó rot$_n\vec{A}$ là hình chiếu của vectơ rot$\vec{A}$ lên phương pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt *S*.

Ta tính rot $\vec{A}$ tại điểm $M(x, y, z)$ trong hệ tọa độ Descartes bằng cách tính các hình chiếu của rot $\vec{A}$ lên ba trục tọa độ x, y, z và chọn S là các mặt tạo bởi hình hộp chữ nhật đi qua điểm M, có các cạnh rất bé Δx, Δy và Δz.

Trước hết ta tính hình chiếu của vectơ rot$\vec{A}$ lên phương z. Ta chọn chu tuyến (L) nằm trong mặt phẳng Oxy gồm bốn đoạn như trên hình 2.8.



Hình 2.8. Chu tuyến L trong mặt phẳng Oxy.

Hình chiếu của $\vec{A}$ lên hướng của đoạn **1** là $A_x(x,y)$, nên ta có:

$$\int_{1} \vec{A}.d\vec{l} = A_x(y)\Delta x . \tag{2.58}$$

Hình chiếu của $\vec{A}$ lên hướng của đoạn**3** là $-A_x(x,y+\Delta y)$, nên:

$$\int_{3} \vec{A}.d\vec{l} = -A_x(y+\Delta y)\Delta x. \tag{2.59}$$

Tương tự đối với các đoạn **4** và **2** ta có:

$$\int_{4} \vec{A}.d\vec{l} = -A_y(x)\Delta y, \tag{2.60}$$

$$\int_{2} \vec{A}.d\vec{l} = A_y(x+\Delta x)\Delta y. \tag{2.61}$$

Cộng tất cả các giá trị trên ta được lưu thông của vectơ $\vec{A}$ dọc theo đường cong kín (L) nằm trong mặt phẳng Oxy:

$$\oint_{(L)} \vec{A}.d\vec{l} = A_x(y)\Delta x - A_x(y+\Delta y)\Delta x - A_y(x)\Delta y + A_y(x+\Delta x)\Delta y. \qquad (2.62)$$

Chia hai vế (2.62) cho $\Delta S = \Delta x\Delta y$ và chuyển qua giới hạn $\Delta S \to 0$ (khi tất cả mọi điểm trên L đều tiến về M), ta được:

$$\mathrm{rot}_z\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{(L)}\vec{A}.d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{A_y(x+\Delta x) - A_y(x)}{\Delta x}\right] - \lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{A_x(y+\Delta y) - A_x(y)}{\Delta y}\right]$$

hay

$$\mathrm{rot}_z\vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \qquad (2.63a)$$

Làm hoàn toàn tương tự ta tính được hình chiếu rot $\vec{A}$ lên trục x và y là:

$$\mathrm{rot}_x\vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad (2.63b)$$

$$\mathrm{rot}_y\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \qquad (2.63c)$$

Các biểu thức (2.63a,b,c) biểu diễn các thành phần hình chiếu rota của trường vectơ $\vec{A}$ tại điểm $M(x, y, z)$ lên các trục tọa độ Descartes. Vì vậy, dưới dạng vectơ ta có:

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z . \qquad (2.64)$$

Sử dụng biểu thức toán tử nabla ∇ đồng thời lưu ý cách biểu diễn tích vectơ theo định thức (xem công thức (1.25) ở chương 1), ta có thể viết rot $\vec{A}$ dưới dạng:

$$\text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \qquad (2.65)$$

Trên đây, ta đã quy ước toán tử $\nabla\times$ có tác dụng vừa là đạo hàm, vừa là nhân có hướng lên vectơ đứng ngay sau nó.

b. Tính chất

Với λ_1 và λ_2 là các hằng số thì ta có:

$$\text{rot}(\lambda_1\vec{A} + \lambda_2\vec{B}) = \lambda_1\text{rot}\vec{A} + \lambda_2\text{rot}\vec{B}. \qquad (2.66)$$

Tính chất này dễ dàng được kiểm chứng bằng cách thay $\vec{A}$ trong (2.64) bởi $(\lambda_1\vec{A} + \lambda_2\vec{B})$ rồi tiến hành tính tính trực tiếp, đồng thời chú ý rằng rota của một hằng số luôn đồng nhất bằng không.

Nếu thay $\vec{A}$ trong (2.64) bởi $u\vec{A}$, với u là một hàm của tọa độ ta thu được tính chất sau:

$$\text{rot}(u\vec{A}) = u\,\text{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\text{grad}u. \qquad (2.67)$$

Tương tư, nếu thay $\vec{A}$ bởi grad$u$ vào (2.64) và giả sử u có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai thì ta có hệ thức:

$$\text{rot}(\text{grad}u) = 0. \qquad (2.68)$$

Ví dụ 2.7: Tính rota của trường vectơ cường độ điện trường:

$$\vec{E} = k\frac{q\vec{r}}{r^3}.$$

Ta có: để tính rot$\vec{E}$ ta cần tính các đạo hàm riêng theo (2.64). Hoàn toàn tương tự như khi tính div$\vec{E}$ trong ví dụ 2.6, ta kiểm tra được rằng

$$\text{rot}\vec{E} = 0.$$

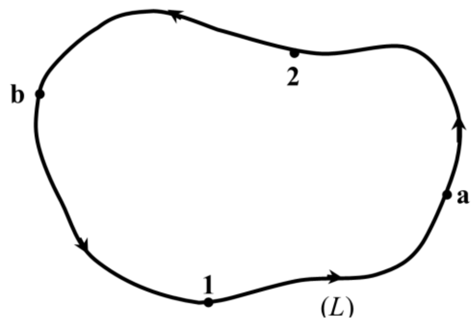
2.3. Phân loại trường vectơ

2.3.1. Trường thế

Mở rộng cho ví dụ 2.7 nói trên ta có định nghĩa, *một trường vectơ* $\vec{A}$ *có* $\text{rot}\vec{A} \equiv 0$ *thì* nó được gọi là *trường thế* hay *trường bảo toàn* [14, 17]. Lúc đó, từ biểu thức định nghĩa (2.57) cho thấy: *nếu* $\vec{A}$ *là trường thế thì lưu số vectơ* $\vec{A}$ *dọc theo đường cong kín* (*L*) *bất kì bằng không*:

$$\oint_{(L)} \vec{A}.d\vec{l} = 0. \tag{2.69}$$

Chúng ta minh họa (2.69) bằng cách xét chu tuyến (*L*) như trên hình 2.9. Khi đó, từ (2.9) ta suy ra:



Hình 2.9. Minh họa chu tuyến *L* cho tính lưu số vectơ của trường thế.

$$\oint_{(L)} \vec{A}.d\vec{l} = \int_{(1a2)} \vec{A}.d\vec{l} + \int_{(2b1)} \vec{A}.d\vec{l} = \int_{(1a2)} \vec{A}.d\vec{l} - \int_{(1b2)} \vec{A}.d\vec{l} = 0,$$

hay

$$\int_{(1a2)} \vec{A}.d\vec{l} = \int_{(1b2)} \vec{A}.d\vec{l}\ . \tag{2.70}$$

Từ đây ta rút ra tính chất: *lưu số vectơ của trường thế dọc theo một đường cong bất kì không phụ thuộc dạng đường tđi mà chỉ phụ thuộc vị trí điểm đầu và điểm cuối*. Đặc biệt, *lưu số vectơ của trường thế trên một đường cong kín sẽ bằng không*.

Đối với các trường thế, do $\text{rot}\vec{A} \equiv 0$ nên từ (2.68) ta suy ra vectơ trường có thể được biểu diễn theo gradient của hàm vô hướng nào đó:

$$\vec{A} = -\text{grad}\varphi. \tag{1.27}$$

Hàm vô hướng φ liên hệ với vectơ trường $\vec{A}$ như trong (2.71) được gọi là *thế vô hướng*. Như vậy, một trường vectơ là trường thế thì ta luôn biểu diễn vectơ trường thông qua hàm thế vô hướng.

Trong vật lí, tùy thuộc vào từng trường vectơ cụ thể ta có các tên gọi riêng cho thế vô hướng. Quay trở lại ví dụ 2.7 ta thấy, trường *tĩnh điện* $\vec{E}$ là một trường thế. Lúc đó, thế vô hướng của trường được gọi là *thế tĩnh điện*. Nếu ta đặt điện tích điểm q_o trong trường của q thì q_o chịu tác dụng của một lực tĩnh điện $\vec{F} = q_o\vec{E}$. Từ nhận xét trên ta rút ra rằng, công của lực tĩnh điện (chính là lưu số của vectơ lực $\vec{F}$) không phụ thuộc dạng của đường đi mà chỉ phụ thuộc vị trí điểm dầu và điểm cuối, công này sẽ bằng không khi điện tích điểm q_o dịch chuyển theo một đường cong kín.

2.3.2. Trường xoáy và trường solenoid

Biểu thức định (2.57) cho thấy *rota* của một trường vectơ đặc trưng cho sự *xoáy* của trường vectơ đó. Vì thế, *nếu một trường vectơ* $\vec{A}$ có $\text{rot}\vec{A} \neq 0$ *thì* $\vec{A}$ *được gọi là trường xoáy*. Trong vật lí, chúng ta gặp nhiều trường hợp về trường xoáy. Ví dụ, theo lí thuyết trường điện từ của Maxwell, bất kì một sự thay đổi nào của từ trường theo thời gian đều tạo ra một điện trường xoáy thể hiện qua phương trình:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{2.72}$$

Ngoài khái niệm trường xoáy, người ta còn định nghĩa trường *trường vectơ* $\vec{A}$ *mà tại mọi điểm trong nó có* $\text{div}\vec{A} = 0$ *thì ta gọi là solenoid* hay *trường hình ống* [2]. Với trường solenoid, các đường vectơ tạo thành các ống liên tục, nếu có một mặt kín bất kì nằm trong trường thì số đường vectơ đi vào bằng số đường đi ra khỏi mặt đó. Vì vậy, thông lượng vectơ trường gửi qua mặt kín bất kì đều bằng không.

Quay trở lại ví dụ 2.6, ta thấy trường tĩnh điện là một trường hình ống trong toàn không gian (trừ tại gốc tọa độ), các đường vectơ là các tia xuất phát từ gốc tọa độ, các ống vectơ có dạng hình nón với đỉnh nằm vị trí điện tích điểm q (chính là điểm nguồn).

2.4. Một số định lí tích phân

Các phép toán vi phân *dive*, *rota* và *grad* mà ta đã xét ở trên đặc trưng cho tính chất hay dáng điệu của trường trong một vùng đủ nhỏ (vi mô). Để đặc trưng cho trường trong các vùng lớn (vĩ mô), dựa trên các định nghĩa của các phép toán vi phân nói trên người ta đã xây dựng các định lí tích phân.

2.4.1. Định lí Ostrogradski - Gauss

Xét một yếu tố vi phân thể tích ΔV_k chứa điểm M_k được bao bởi mặt kín S_k nằm trong trường vectơ $\vec{A}$. Dựa trên định nghĩa của *dive*, ta có [3]:

$$\mathrm{div}\vec{A}(M_k) = \lim_{\Delta V_k \to 0} \frac{\oiint\limits_{(S_k)} \vec{A}.d\vec{S}}{\Delta V_k}. \tag{2.73}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của giới hạn ta luôn chọn được hằng số ε_k nhỏ tuỳ ý để

$$\left| \mathrm{div}\vec{A}(M_k) - \frac{\oiint\limits_{(S_k)} \vec{A}.d\vec{S}}{\Delta V_k} \right| < \varepsilon_k,$$

hay

$$\left| \mathrm{div}\vec{A}(M_k)\Delta V_k - \oiint\limits_{(S_k)} \vec{A}.d\vec{S} \right| < \Delta V_k \varepsilon_k. \tag{2.74}$$

Lấy tổng của (2.74) theo tất cả các yếu tố vi phân thể tích

$$\left|\sum_k \mathrm{div}\vec{A}(M_k)\Delta V_k - \sum_k \oiint_{(S_k)} \vec{A}.d\vec{S}\right| < \sum_k \varepsilon_k \Delta V_k.$$

Cho các yếu tố vi phân thể tích ΔV_ktiến tới 0 và chú ý rằng

$$\lim_{\Delta V_k \to o} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{div}\vec{A}(M_k)\Delta V_k = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\vec{A}dV, \qquad (2.75)$$

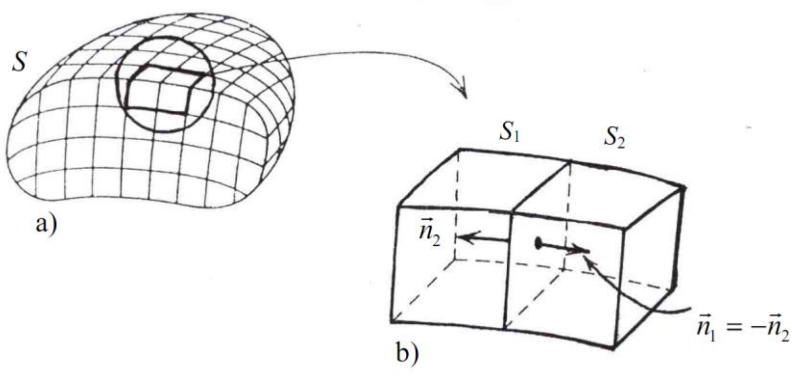
$$\sum_{k=1}^{\infty} \oiint_{(S_k)} \vec{A}.d\vec{S} = \oiint_{(S)} \vec{A}.d\vec{S}\ , \qquad (2.76)$$

ta được công thức *định lí Ostrogradski-Gauss* (viết tắt là O-G):

$$\iiint_{(V)} \mathrm{div}\vec{A}dV = \oiint_{(S)} \vec{A}.d\vec{S}\ . \qquad (2.77)$$

Trong biểu thức (2.77), S là mặt kín bao quanh thể tích V. Biểu thức này cho biết mối quan hệ giữa tích phân theo thể tích với tích phân mặt bao quanh thể tích đó.

Trên phương diện hình học, biểu thức định lí O-G được minh họa như trên hình 2.10.



Hình 2.10. Minh họa hình học cho định lí O-G.

Ta chia toàn bộ thể tích V (giới hạn bởi mặt kín S) thành vô số phần tử thể tích ΔV_i rất bé (được bao quanh bởi các mặt kín nhỏ ΔS_i). Xét hai phần tử thể tích cạnh nhau có một mặt biên chung như hình

2.10b, trên mặt biên này, thông lượng đi ra khỏi phần tử thể tích thứ nhất có giá trị bằng nhưng ngược dấu với thông lượng đi vào phần tử thể tích thứ hai. Vì vậy, khi tính tổng thông lượng qua mặt S_1 và S_2 thì phần thông lượng chuyển qua mặt chung sẽ triệt tiêu. Mở rộng cho toàn miền thể tích *V* ta thấy, thông lượng tổng của các mặt con nằm bên trong thể tích bằng không, chỉ còn lại thông lượng tính trên bề mặt thể tích này.

Định lí O-G được ứng dụng nhiều trong vật lí. Xét một ứng dụng quan trọng là thiết lập thiết lập định luật bảo toàn dòng cho khối chất lưu lí tưởng, chuyển động với vận tốc $\vec{v}(M)$. Đại lượng $\vec{j} = \rho\vec{v}$ (với ρ là mật độ khối lượng của chất lưu) được gọi là *vectơ mật độ dòng*. Khi đó, tích phân $\oiint\limits_{(S)} \vec{j}.d\vec{S}$ là lượng chất lưu thoát ra khỏi mặt kín *S* trong một đơn vị thời gian. Vì khối chất lưu không chịu nén, nên theo định luật bảo toàn khối lượng thì trong một đơn vị thời gian, lượng chất lưu thoát ra khỏi mặt kín *S* chính bằng độ giảm khối lượng trong thể tích *V*. Nghĩa là:

$$\oiint\limits_{(S)} \vec{j}d\vec{S} = -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV.$$

Áp dụng định lí O - G, ta có:

$$\oiint\limits_{(S)} \vec{j}d\vec{S} = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\vec{j}\, dV .$$

Từ đó suy ra

$$\iiint\limits_{(V)} (\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t})dV = 0 . \qquad (2.78)$$

Do thể tích *V* được chọn tuỳ ý nên (2.78) chỉ thoả mãn khi

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 . \qquad (2.79)$$

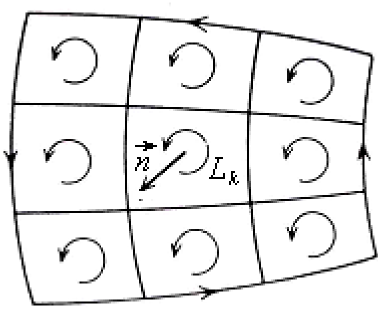
Biểu thức (2.79) được gọi là *phương trình liên tục của dòng chất lưu lí tưởng*. Nếu sự chảy là *dừng* (mật độ khối lượng không phụ thuộc vào thời gian) thì biểu thức (2.79) trở thành:

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0. \tag{2.80}$$

Lúc đó, trường vận tốc là một trường hình ống, nghĩa là có bao nhiêu đường vectơ đi vào một mặt kín thì có bấy nhiêu đường vectơ đi ra khỏi mặt đó. Nói cách khác, số đường dòng không thay đổi trong suốt quá trình chất lưu lí tưởng chuyển động ổn định. Đây chính là nội dung của *định luật bảo toàn dòng của chất lưu lý tưởng*.

2.4.2. Định lí Stokes

Xét mặt S được giới hạn chu tuyến L nằm trong trường vectơ $\vec{A}$. Ta chia S thành vô số các phần tử diện tích ΔS_k vô cùng nhỏ được giới hạn bởi chu tuyến L_k. Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt ΔS_k và chiều dương của chu tuyến L_k được chỉ như trên hình 2.11.



Hình 2.11. Minh họa tính lưu số vectơ dọc theo chu tuyến L và dọc theo các chu tuyến L_k.

Xuất phát từ biểu thức (2.57), ta có rota của trường vectơ $\vec{A}$ tại điểm M nằm trong ΔS_k được tính:

$$\mathrm{rot}_n\vec{A}(M) = \lim_{\Delta S_k \to 0} \frac{\oint\limits_{(L_k)} \vec{A}d\vec{l}}{\Delta S_k}.$$

Theo tính chất của giới hạn, ta có thể chọn được hằng số ε_k nhỏ tuỳ ý để cho

$$\left| \text{rot}\vec{A}(M_k) - \frac{\oint\limits_{(L_k)} \vec{A}d\vec{l}}{\Delta S_k} \right| < \varepsilon_k . \tag{2.81}$$

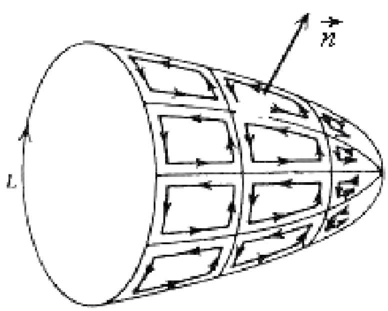
Nhân hai vế của (2.81) với ΔS_k, sau đó lấy tổng theo tất cả các yếu tố vi phân mặt, rồi chuyển qua giới hạn $\Delta S_k \to 0$, đồng thời chú ý rằng

$$\sum_k \oint\limits_{(L_k)} \vec{A}d\vec{l} = \oint\limits_{(L)} \vec{A}d\vec{l}\ , \quad \lim_{\Delta S_k \to 0} \sum_k \text{rot}_n \vec{A}(M_k)\Delta S_k = \iint\limits_{(S)} \text{rot}\vec{A}d\vec{S}\ ,$$

ta có:

$$\iint\limits_{(S)} \text{rot}\vec{A}.d\vec{S} = \oint\limits_{(L)} \vec{A}.d\vec{l}\ . \tag{2.82}$$

Biểu thức (2.82) được gọi là biểu thức của *định lí Stokes*, nó mô tả mối quan hệ giữa tích phân theo diện tích với tích phân theo đường cong kín giới hạn diện tích đó và được minh họa như trên hình 2.12.



Hình 2.12. Minh họa cho định lí Stokes.

Dựa vào hình vẽ cho thấy, lưu số vectơ trên các cạnh của các chu tuyến L_k triệt tiêu lẫn nhau (do mỗi cạnh lấy tích phân đường hai lần theo chiều ngược nhau) ngoại trừ trên chu tuyến lớn L.

2.4.3. Các định lí Green

Xét trường vectơ $\vec{A}$ có dạng $\vec{A}$ = *u*grad*v*, trong đó *u* và *v* là các hàm vô hướng và giả thiết các đạo hàm riêng cấp hai của chúng tồn tại.

Áp dụng định lí O - G cho trường vectơ này ta có:

$$\oiint_S u\,\mathrm{grad}v.d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\left(u\,\mathrm{grad}v\right)dV$$

$$= \iiint_V \left(u\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}v) + \mathrm{grad}u.\mathrm{grad}v\right)dV,$$

hay

$$\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \iiint_V \left(u\Delta v + \nabla v\nabla u\right)dV. \qquad (2.83)$$

Biểu thức (2.83) được gọi là công thức *định lí Green thứ nhất*.

Mặt khác, nếu đổi chỗ *u* và *v* trong công thức (2.83) ta được:

$$\oiint_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_V \left(v\Delta u + \nabla u\nabla v\right)dV. \qquad (2.84)$$

Trừ vế với vế hai phương trình (2.83) và (2.84) cho nhau, ta được:

$$\oiint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS = \iiint_V \left(v\Delta u - u\Delta v\right)dV. \qquad (2.85)$$

Biểu thức (2.85) được gọi là công thức *định lí Green thứ hai*.

2.5. Các hệ tọa độ cong trực giao

2.5.1. Hệ tọa độ cong trực giao

Chúng ta biết rằng, vị trí của một chất điểm *M* trong không gian ba chiều hoàn toàn được xác định khi biết *vectơ vị trí* $\vec{r}$ của nó đối với điểm mốc *O* nào đó. Thông thường để tiện khảo sát người ta gắn vào điểm mốc *O* một hệ tọa độ thích hợp. Ví dụ, trong hệ tọa độ Descartes O*xyz*, vectơ vị trí $\vec{r}$ có dạng:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z). \qquad (2.86)$$

Trong nhiều bài toán vật lí, để thuận tiện cho việc xác định vị trí điểm *M*, thay cho bộ ba số (*x, y, z*) người ta dùng bộ ba số (q_1, q_2, q_3), nghĩa là:

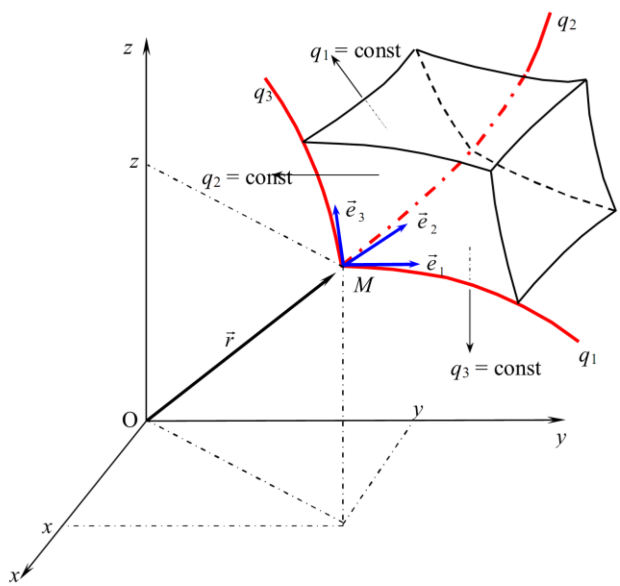
$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)\,. \tag{2.87}$$

Bộ ba số (q_1, q_2, q_3) xác định vị trí của điểm *M* trong không gian được gọi là *tọa độ cong* của điểm *M*. Rõ ràng, các tọa độ cong (q_1, q_2, q_3) là các hàm của các tọa độ Descartes (*x, y, z*) và ngược lại, nghĩa là:

$$q_1 = q_1(x, y, z),\ \ q_2 = q_2(x, y, z),\ \ q_3 = q_3(x, y, z). \tag{2.88}$$

$$x = x(q_1\,, q_2\,, q_3),\ \ y = y(q_1\,, q_2\,, q_3),\ \ z = z(q_1\,, q_2, q_3). \tag{2.89}$$

Cho q_2 và q_3 cố định, thay đổi q_1 thì đầu mút của vectơ $\vec{r}$ sẽ vạch ra trong không gian một đường cong, ta gọi đây là *đường tọa độ* q_1. Các đường tọa độ q_2 và q_3 cũng được định nghĩa tương tự. Các mặt mức $q_i = C_i$ (với i = 1, 2, 3) đi qua điểm *M* được gọi là *các mặt tọa độ* của điểm *M*. Lúc đó, giao tuyến của hai mặt tọa độ chính là đường tọa độ (Hình 2.13).



Hình 2.13. Vị trí của điểm *M* trong không gian có thể xác định theo các tọa độ Descartes (*x,y,z*) hoặc theo các tọa độ cong (q_1, q_2, q_3).

Trên mỗi đường tọa độ q_i, người ta đưa vào ba vectơ đơn vị $\vec{e}_i$ (i = 1, 2, 3) tương ứng tiếp tuyến với đường tọa độ q_i tại điểm M và hướng theo chiều tăng của q_i. Bộ 3 vectơ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ này có hướng thay đổi phụ thuộc vào vị trí của điểm M nên được gọi là hệ *vectơ cơ sở địa phương*. Lúc đó, một vectơ trong không gian ba chiều có thể phân tích được thành 3 thành phần tọa độ cong của nó như đã làm trong hệ tọa độ Descartes.

Một hệ tọa độ cong mà có các vectơ đơn vị cơ sở địa phương luôn vuông góc với nhau từng đôi một tại mọi điểm trong không gian thì được gọi là *hệ tọa độ cong trực giao*.

2.5.2. Một số hệ tọa độ cong trực giao thường dùng

a. Hệ tọa độ trụ

Hệ tọa độ trụ thường được dùng để khảo sát các bài toán có tính đối xứng trục. Trong hệ tọa độ trụ, vị trí của điểm M trong không gian được đặc trưng bởi bộ ba số:

$$q_1 = \rho\,,\ q_2 = \phi\,,\ q_3 = z\,. \tag{2.90}$$

Mối quan hệ giữa tọa độ trụ với tọa độ Descartes được xác định bởi:

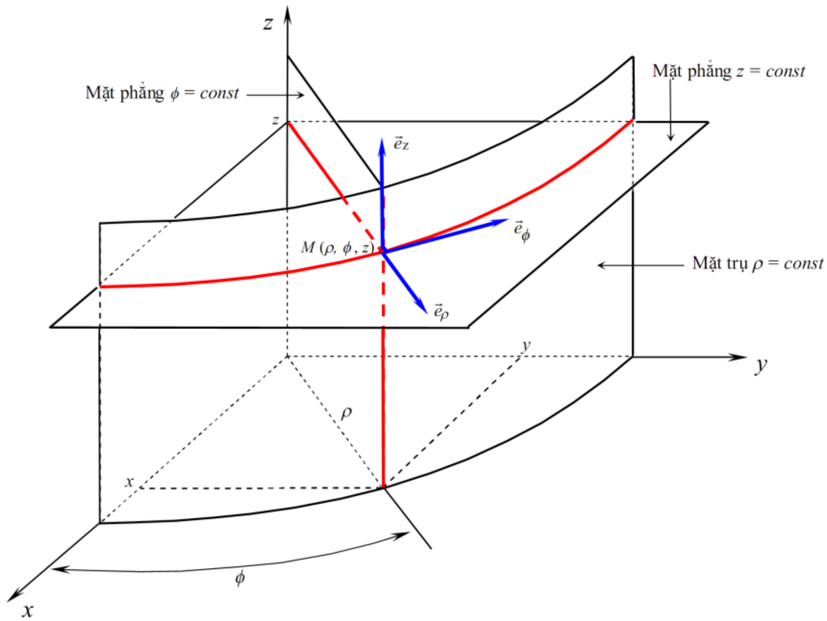
$$x = \rho\cos\phi,\quad y = \rho\sin\phi,\quad z = z\,. \tag{2.91}$$

Trong hệ tọa độ trụ, các mặt tọa độ được xác định bởi (Hình 2.14):

- Mặt tọa độ $\rho = const$: mặt trụ có trục là Oz;
- Mặt toạ độ $\phi = const$: nửa mặt phẳng giới hạn bởi Oz;
- Mặt tọa độ $z = const$ là mặt phẳng vuông góc với trục Oz.

Giao của ba mặt tọa độ trên chính là ba đường tọa độ ρ, ϕ và z, trong đó:

- Đường ρ là nửa đường thẳng xuất phát từ trục Oz và vuông góc với trục Oz, tọa độ ρ biến thiên từ 0 đến $+\infty$;
- Đường ϕ là đường tròn vuông góc với trục Oz và có tâm nằm trên Oz, tọa độ ϕ biến thiên từ 0 đến 2π;
- Đường z là đường thẳng song song với trục Oz, tọa độ z biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$.



Hình 2.14. Các đường toạ độ và các mặt tọa độ của hệ toạ độ trụ (ρ, ϕ, z).

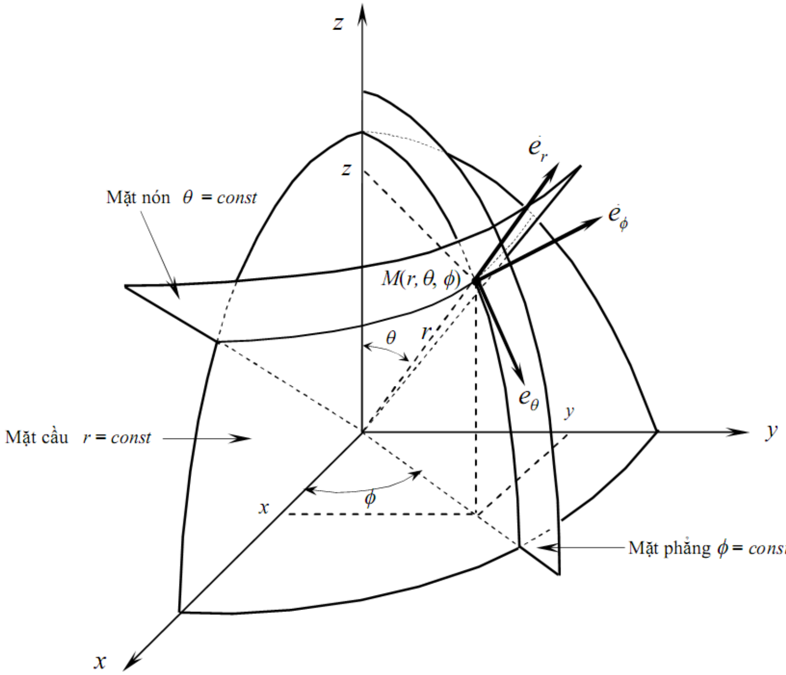
b. Hệ tọa độ cầu

Hệ tọa độ cầu thường được sử dụng để khảo sát bài toán có tính đối xứng cầu. Trong hệ tọa độ này, vị trí của điểm *M* được xác định bởi bộ ba số (r, θ, ϕ). Mối liên hệ giữa tọa độ cầu với tọa độ Descartes được xác định bởi:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , y = r\sin\theta\sin\phi \ , z = r\cos\theta \ . \qquad (2.92)$$

Trong hệ tọa độ cầu, các mặt tọa độ được xác định bởi (Hình 2.15):

- Mặt $r = const$: mặt cầu có tâm tại O;
- Mặt $\theta = const$: mặt nón nhận Oz làm trục;
- Mặt $\phi = const$ là mặt phẳng đi qua trục Oz.



Hình 2.15. Các mặt tọa độ và các đường tọa độ của hệ tọa độ cầu.

Giao điểm của ba mặt tọa độ này là ba đường tọa độ r, θ và ϕ, trong đó:

- Đường r là nửa đường thẳng xuất phát từ gốc tọa độ, tọa độ r biến thiên từ 0 đến $+\infty$;
- Đường θ là đường kinh tuyến trên mặt cầu, tọa độ θ biến thiên từ 0 đến π;
- Đường ϕ là đường tròn vĩ tuyến trên mặt cầu, tọa độ ϕ biến thiên từ 0 đến 2π.

2.5.3. Hệ số Lame

Xét hai điểm $M(q_1, q_2, q_3)$ và $M_1(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ rất gần nhau trong không gian. Cả hai điểm này cùng nằm trên một đường tọa độ q_1. Kí hiệu độ dài cung MM_1 là Δl_1 và xét tỷ số $\dfrac{\Delta l_1}{\Delta q_1}$ khi $\Delta q_1 \to 0$. Nếu tỷ số này tồn tại (hữu hạn) thì giới hạn này được kí hiệu là h_1 và được gọi là *hệ số Lame* (còn gọi là *hệ số tỷ xích – scale factor*) đối với tọa độ q_1 :

$$h_1 = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\Delta l_1}{\Delta q_1} = \frac{dl_1}{dq_1}. \tag{2.93a}$$

Hoàn toàn tương tự, ta định nghĩa hệ số Lame đối với tọa độ q_2 và q_3:

$$h_2 = \lim_{\Delta q_2 \to 0} \frac{\Delta l_2}{\Delta q_2} = \frac{dl_2}{dq_2}. \tag{2.93b}$$

$$h_3 = \lim_{\Delta q_3 \to 0} \frac{\Delta l_3}{\Delta q_3} = \frac{dl_3}{dq_3}. \tag{2.93c}$$

Về mặt hình học, hệ số Lame đặc trưng cho độ cong của các đường toạ độ. Nếu hệ tọa độ có các đường tọa độ là các đường thẳng thì hệ số Lame luôn bằng 1 tại mọi điểm trong không gian. Trong hệ tọa độ trụ (ρ, ϕ, z), các hệ số Lame bằng:

$$h_1 = h_\rho = \lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{\Delta l_1}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho} = 1, \tag{2.94a}$$

$$h_2 = h_\phi = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\Delta l_2}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\rho\Delta\phi}{\Delta\phi} = \rho, \tag{2.94b}$$

$$h_3 = h_z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta l_3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1. \tag{2.94c}$$

Khi biết hệ số Lame ta tính được các yếu tố vi phân độ dài trên mỗi đường tọa độ:

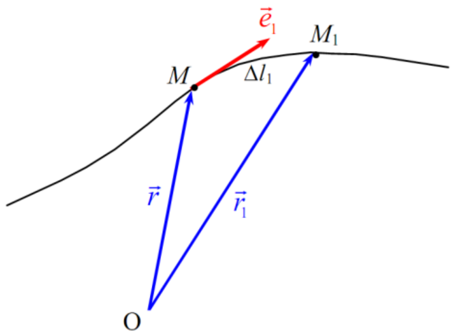
$$dl_1 = h_1 dq_1; \;\; dl_2 = h_2\, dl_2; \;\; dl_3 = h_3\, dq_3 . \tag{2.95}$$

Bây giờ ta tìm mối quan hệ giữa hệ số Lame khi chuyển từ hệ tọa độ Descartes sang hệ tọa độ cong. Vị trí của M và M_1 trong hệ tọa độ Descartes tương ứng được xác định theo các vectơ vị trí $\vec{r}(x, y, z))$ và $\vec{r}_1 = \vec{r}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ như trên hình 2.16. Ta đặt:

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \vec{r}(x, y, z) = \vec{e}_x \Delta x + \vec{e}_y \Delta y + \vec{e}_z \Delta z. \tag{2.96}$$

Khi đó:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{e}_z . \tag{2.97}$$



Hình 2.16. Minh họa đạo hàm vectơ vị trí theo tọa độ cong trực giao.

Mặt khác, từ hình 2.16 ta thấy: khi $\Delta q_1 \to 0$ thì $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta q_1}$ tiến tới $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ cùng phương chiều với vectơ đơn vị $\vec{e}_1$ tại *M*. Vì vậy:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \vec{e}_1 \frac{dl_1}{dq_1} = \vec{e}_1 \; h_1. \tag{2.98}$$

Từ (2.97) và (2.98) suy ra:

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{e}_z = \vec{e}_1 \; h_1. \tag{2.99a}$$

Tương tự cho các đạo hàm theo q_2 và q_3, ta có:

$$\frac{\partial x}{\partial q_2}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_2}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_2}\vec{e}_z = \vec{e}_2 \; h_2, \tag{2.99b}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_3}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_3}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_3}\vec{e}_z = \vec{e}_3 \; h_3. \tag{2.99c}$$

Lần lượt bình phương hai vế của các phương trình (2.99) và sử dụng định nghĩa tích vô hướng, ta được các hệ thức:

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2, \qquad (2.100a)$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2, \qquad (2.100b)$$

$$h_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2. \qquad (2.100c)$$

Các biểu thức (2.100) được sử dụng để tính các hế số Lame khi biết mối liên hệ giữa các tọa độ Descartes với các tọa độ cong trực giao.

2.5.4. Các phần tử vi phân

Trong mục này ta sẽ tính các phần tử *vi phân khoảng cách, vi phân diện tích* và *vi phân thể tích* trong hệ tọa độ cong trực giao. Xét vi phân của vectơ vị trí $\vec{r}(q_1, q_2, q_3)$, dựa vào tính chất của hàm hợp ta có:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3. \qquad (2.101)$$

Mặt khác, các đạo hàm riêng của $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, ta được:

$$d\vec{r} = h_1\, dq_1 \vec{e}_1 + h_2\, dq_2 \vec{e}_2 + h_3\, dq_3 \vec{e}_3\,. \qquad (2.102a)$$

Từ (1.102), ta suy ra *yếu tố vi phân khoảng cách trong tọa độ cong*:

$$dr = \sqrt{(h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2}\,. \qquad (2.102b)$$

Để tìm các phần tử vi phân diện tích và vi phân thể tích chúng ta sử dụng tích vectơ và tích bội ba vô hướng. Đặt $d\vec{r} = \overrightarrow{MN}$ (với N và M rất gần nhau), ta dựng ba mặt tọa độ qua M và ba mặt tọa độ qua N để tạo thành một hình hộp cong có độ dài các cạnh (như trên hình 2.17):

$$dl_i = h_i dq_i \ (i = 1\text{-}3). \qquad (2.103)$$

Dựa vào tính chất của tích vectơ (xem mục 1.4.2), ta rút ra được biểu thức của các *vi phân diện tích mặt*:

$$\begin{cases} dS_1 = |\vec{e}_2 dl_2 \times \vec{e}_3 dl_3| = h_2 h_3 dq_2 dq_3, \\ dS_2 = |\vec{e}_1 dl_1 \times \vec{e}_3 dl_3| = h_1 h_3 dq_1 dq_3, \\ dS_3 = |\vec{e}_1 dl_1 \times \vec{e}_2 dl_2| = h_1 h_2 dq_1 dq_2, \end{cases} \quad (2.104)$$

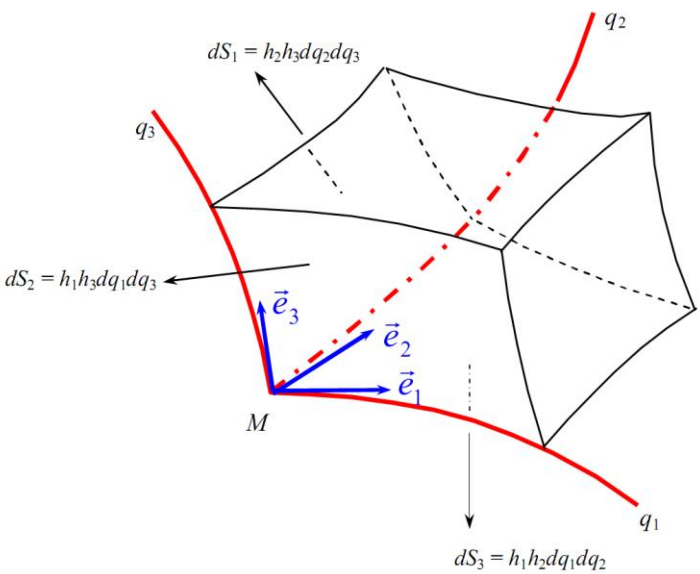
trong đó, dS_i tương ứng là mặt vuông góc với các đường tọa độ q_i.

Theo tính chất của tích bội ba vô hướng, *vi phân thể tích* (bằng thể tích của hình hộp) có thể được xác định theo:

$$dV = \left| (dl_1 \vec{e}_1).\left[(dl_2 \vec{e}_2) \times (dl_3 \vec{e}_3)\right] \right|. \quad (2.105)$$

Thay $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ và $dl_i = h_i\, dq_i$ vào (2.105), ta được:

$$dV = h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 \quad (2.106)$$



Hình 2.17. Minh họa các phân diện tích mặt và vi phân thể tích.

2.6. Các toán tử vi phân trong hệ tọa độ cong trực giao

2.6.1. Gradient

Ta đã biết, hình chiếu của vectơ grad*u* lên một hướng nào đó bằng đạo hàm của hàm *u* theo hướng này. Vì vậy, để xây dựng của biểu thức grad$u$ trong hệ tọa độ cong trực giao, ta chỉ cần tính đạo hàm của u theo các hướng của q_1, q_2, và q_3, nghĩa là:

$$\mathrm{grad}\,u = \vec{e}_1\,\mathrm{grad}_1 u + \vec{e}_2\,\mathrm{grad}_2 u + \vec{e}_3\,\mathrm{grad}_3 u\,, \tag{2.107}$$

với, grad$_i u$ là hình chiếu của grad$u$ lên phương $\vec{e}_i$ của đường tọa độ q_i:

$$\mathrm{grad}_i u = \frac{\partial u}{\partial \vec{e}_i}\,. \tag{2.108}$$

Mặt khác:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}_1} = \frac{\partial u}{\partial l_1} = \lim_{\Delta l_1 \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l_1} = \lim_{\Delta l_1 \to 0} \frac{u(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{\Delta l_1}$$

$$= \lim_{\Delta q \to 0} \frac{u(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - u(q_1, q_2, q_3)}{\Delta q_1} \frac{\Delta q_1}{\Delta l_1} = \frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{1}{h_1}\,. \tag{2.109}$$

Kết hợp (2.108) và (2.109) ta có:

$$\mathrm{grad}_1 u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}\,. \tag{2.110a}$$

Hoàn toàn tương tự đối với các tọa độ q_2 và q_3 cuối cùng ta thu được:

$$\mathrm{grad}_2 u = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}\,, \tag{2.110b}$$

$$\mathrm{grad}_3 u = \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}\,. \tag{2.110c}$$

Vậy, *gradient* của hàm vô hướng u tại điểm $M(q_1, q_2, q_3)$ trong hệ tọa độ trực giao được xác định bằng

$$\mathrm{grad}\,u(q_1, q_2, q_3) = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}\,. \tag{2.111}$$

Ví dụ 2.8: Trong hệ tọa độ cầu (r , θ , ϕ), bằng cách tính các hệ số Lame sau đó thay vào (2.111) ta thu được biểu thức gradient:

$$\text{grad}u = \vec{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi} \quad . \tag{2.112}$$

2.6.2. Dive

Xuất phát từ biểu thức định nghĩa dive của một trường vectơ

$$\text{div}\,\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint\limits_{(S)} \vec{A}.d\vec{S}}{\Delta V}, \tag{2.113}$$

ta có thể tìm biểu thức tường minh của $\text{div}\vec{A}$ trong hệ tọa độ cong trực giao. Muốn vậy, ta cần tính thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ qua mặt kín S bao quanh thể tích vô cùng bé ΔV theo các tọa độ cong [4].

Hoàn toàn tương tự như cách làm trong hệ tọa độ Descartes, ở đây ta xét một hình hộp chữ nhật cong, thể tích ΔV như trên hình 2.17. Sau khi tính thông lượng tổng cộng qua các mặt của hình hộp, ta chia cho thể tích ΔV (tính theo (2.106)) và lấy giới hạn theo (2.113). Kết quả thu được:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial\left(A_1 h_2 h_3\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(A_2 h_1 h_3\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(A_3 h_1 h_2\right)}{\partial q_3}\right]. \tag{2.114}$$

Biểu thức (2.114) mô tả dive của trường vectơ $\vec{A}$ tại điểm $M(q_1, q_2, q_3)$ trong hệ tọa độ cong trực giao nói chung. Trong hệ tọa độ trụ, ta có:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \rho\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]. \tag{2.115}$$

2.6.3. Rota

Dựa vào biểu thức định nghĩa (2.57), ta có thể xây dựng biểu thức của $\text{rot}\vec{A}$ trong hệ tọa độ cong trực giao hoàn toàn tương tự như đã xây dựng trong hệ tọa độ Descartes. Ta chọn các mặt để tính lưu số vectơ là các mặt của hình hộp chữ nhật cong được mô tả như trên hình 2.17. Khi đó, các vi phân độ dài cung và vi phân diện tích được tính theo (2.95) và (2.106). Kết quả cuối cùng thu được (việc chứng minh xem như nội dung bài tập):

$$\begin{cases} rot_1\vec{A} = \dfrac{1}{h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_3h_3) - \dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_2h_2)\right], \\ rot_2\vec{A} = \dfrac{1}{h_3h_1}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_3}(A_1h_1) - \dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_3h_3)\right], \\ rot_3\vec{A} = \dfrac{1}{h_1h_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}(A_2h_2) - \dfrac{\partial}{\partial q_2}(A_1h_1)\right]. \end{cases} \quad (2.116)$$

Biểu thức (2.116) biểu diễn các thành phần hình chiếu của $\mathrm{rot}\vec{A}$ tại điểm $M(q_1, q_2, q_3)$ lên các đường tọa độ trong hệ tọa độ cong trực giao. Dựa vào biểu diễn định thức, ta có thể viết lại (2.116) dưới dạng:

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}. \quad (2.117)$$

Trong hệ tọa độ cầu, bằng cách tính các hệ số Lame và thay vào (2.117) ta thu được:

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\,A_\phi \end{vmatrix}. \quad (2.118)$$

2.6.4. Toán tử Laplace

Trong hệ toạ độ cong trực giao, toán tử Laplace Δ được xác định hoàn toàn như trong hệ toạ độ Descartes, ở đấy ta đã thu được toán tử Δ bằng cách tác dụng *dive* lên *gradient*:

$$\Delta = \nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Để chuyển biểu thức này sang hệ tọa độ cong trực giao (q_1, q_2, q_3), trước hết ta thực hiện tính gradient theo (2.111), sau đó tác dụng tiếp bởi phép toán *dive* theo công thức (2.114). Kết quả thu được:

$$\Delta = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right]. \quad (2.119)$$

Ví dụ 2.9:

Trong hệ tọa độ cầu (r, θ, ϕ), bằng cách tính các hệ số Lame và thay vào (2.119) ta được biểu thức của toán tử Laplace:

$$\Delta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]. \quad (2.120)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Một chất điểm chuyển động trong trường lực xuyên tâm. Chứng minh rằng vectơ động lượng của chất điểm luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

2.2. Chứng minh các công thức:

a) $\mathrm{rot}(u\vec{A}) = u\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\times\mathrm{grad}u$.

b) $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}$.

c) $\mathrm{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}.\nabla)\vec{A} - (\vec{A}.\nabla)\vec{B}$.

d) $\mathrm{grad}\,(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{A} + \vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B} + (\vec{B}.\nabla)\vec{A}$

$+ (\vec{A}.\nabla)\vec{B}$.

e) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u) = \nabla.(\nabla u) = (\nabla.\nabla)u = = \nabla^2 u = \Delta u$.

f) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u) = \nabla\times(\nabla u) = (\nabla\times\nabla)u \equiv 0$.

g) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \nabla[\nabla\times\vec{A}] \equiv 0$.

h) $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

2.3. Một mô men lưỡng cực điện $\vec{P}$ (không đổi) tạo ra xung quanh một trường thế vô hướng $\varphi(\vec{r}) = k\dfrac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3}$, trong đó $\vec{r}$ là vectơ vị trí tại điểm xét. Biết $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$, chứng minh rằng: vectơ cường độ điện trường của lưỡng cực điện được tính bởi

$$\vec{E} = k\left(\frac{3(\vec{P}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right).$$

2.4. Một mô men lưỡng cực từ $\vec{M}$ (không đổi) tạo ra xung quanh nó trường thế vectơ $\vec{A}$ được xác định bởi: $\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\vec{r}}{r^3}$, trong đó $\vec{r}$ là vectơ vị trí. Biết $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, chứng minh rằng vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ của lưỡng cực từ được tính bởi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{M}\,\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}\right).$$

2.5. Cho $\varphi = 2x^2y - xz^3$. Tìm $\nabla\varphi$ và $\nabla^2\varphi$.

2.6. Tìm mặt mức của các trường vô hướng sau:

a) $u = x^2 - y^2$;

b) $u = x^2 + 3y^2 + z^2$.

2.7. Tìm các điểm mà tại đó gradient của trường $u = x^2+y^2+z^2$

a) vuông góc với trục Oz;

b) bằng không.

2.8. Thiết lập các biểu thức vi phân diện tích và vi phân thể tích trong hệ tọa độ cầu và trong hệ tọa độ trụ.

2.9. Tìm biểu thức của div $\vec{A}$ trong hệ tọa độ cầu (r,θ,ϕ).

2.10.Tìm biểu thức grad$u$và Δutrong hệ tọa độ trụ.

2.11. Chứng minh công thức (2.116) và tìm rot $\vec{A}$ trong hệ tọa độ trụ.

2.12. Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{A} = (0,0,z)$ qua phần mặt cầu $x^2+ 3y^2 +z^2=a$ nằm trong góc tọa độ phần tư thứ nhất ($x\geq 0$, $y\geq 0$, $z \geq 0$).

2.13. Tính lưu thông của trường vectơ $\vec{A} = (x,y,z)$ dọc theo các đường tròn:

a) $x^2+ y^2 =1$, $z = 0$;

b) $(x-2)^2+ y^2 =1$, $z = 0$.

2.14. Cho $\vec{r} = (t^3 + 2t)\vec{e}_x - 3e^{-2t}\vec{e}_y + 2\sin 5t\,\vec{e}_z$. Hãy tìm các biểu thức sau tại $t = 0$.

a) $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$; **b)** $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$; **c)** $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; **d)** $\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$.

2.15. Tìm vectơ đơn vị trực giao với mặt mức $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ tại $P(3,-1, 2)$

2.16. Cho hàm vô hướng $f(r)$ với $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ và giả thiết $f'(r) = \dfrac{df}{dr}$ tồn tại. Hãy chứng minh rằng: $\operatorname{grad} f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}$.

2.17. Một hạt chuyển động trong không gian theo phương trình chuyển động $\vec{r} = \vec{r}(t)$ với t là thời gian. Hãy chứng minh rằng gia tốc $\vec{a}$ của hạt được biểu diễn bởi:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n,$$

với v là vận tốc $\vec{e}_t$ và $\vec{e}_n$ tương ứng là vectơ đơn vị theo hướng của gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của chất điểm; còn R là bán kính cong của quỹ đạo.

2.18. Cho hàm vô hướng $u = 2x^3y - 3y^2z$ và điểm $P(1, 2, -1)$.

a) Tìm đạo hàm của u theo hướng PQ với $Q = (3, -1, 5)$.

b) Theo hướng nào từ điểm P thì đạo hàm của u theo hướng đó là cực đại.

c) Hãy tính độ lớn của đạo hàm theo hướng mà tại đó nó cực đại.

2.19. Một hình cầu bán kính *R*, tích điện đều trên bề mặt ngoài với mật độ điện tích mặt σ, quay quanh trục của nó với vận tốc góc ω. Hãy tính cảm ứng từ bên trong hình cầu?

2.20. Vận dụng định lí O – G để tìm vectơ cường độ điện trường ở trong và ngoài một quả cầu bán kính *R*, được tích điện đều với mật độ điện tích khối ρ = const. Giả thiết hằng số điện môi ở trong và ngoài quả cầu đều bằng ε.

Chương 3
PHƯƠNG TRÌNH VẬT LÍ-TOÁN

3.1. Đại cương về phương trình vật lí-toán

3.1.1. Mở đầu

Phương trình có chứa *các đạo hàm riêng của hàm hai hoặc nhiều biến được gọi là phương trình đạo hàm riêng*. Cấp cao nhất của đạo hàm xuất hiện trong phương trình được gọi là *cấp* của phương trình. Phương trình đạo hàm riêng là rất phổ biến trong thực tế vì nó cho phép mô tả sự biến đổi của một biến số theo hai hay nhiều biến số độc lập khác nhau. Phương trình đạo hàm riêng gắn liền với mô tả hiện tượng vật lí thường được gọi là *phương trình vật lí - toán*. Ta xét một số thí dụ về phương trình vật lí-toán trong thực tế:

- Phương trình Poisson: $\Delta u = f$. Phương trình này thường xuất hiện khi nghiên cứu thế tĩnh điện, từ trường tĩnh, thủy động lực học, thế hấp dẫn, truyền nhiệt dừng. Đặc biệt, khi $f \equiv 0$ thì phương trình Poisson trở thành phương trình Laplace;
- Phương trình D' Alember: $\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, mô tả quá trình lan truyền sóng như: sóng đi điện từ, các sóng đàn hồi;
- Các phương trình Maxwell mô tả các hiện tượng điện từ;
- Phương trình Schrodinger: $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\vec{r},t)\psi$, mô tả sự biến đổi trạng thái của hạt vi mô theo thời gian trong trường thế năng $V(\vec{r},t)$;
- Phương trình Klein - Gordon: $\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - k_o^2\psi = 0$, mô tả chuyển động của vi hạt trong trường hợp tương đối tính.

Tương tự phương trình vi phân thường, phương trình đạo hàm riêng được gọi là *tuyến tính* nếu hàm phải tìm và các đạo hàm của nó chỉ xuất hiện với lũy thừa bậc một và không có tích của chúng với nhau. Nếu thêm vào đó, mọi số hạng của phương trình đều chứa hàm phải tìm hoặc đạo hàm của nó thì phương trình được gọi là *tuyến tính thuần nhất*. Ngược lại, tức là có số hạng không chứa hàm phải tìm và cũng không chứa đạo hàm của nó thì ta có *phương trình đạo hàm riêng tuyến tính không thuần nhất*.

Chương này chỉ xét các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai được ứng dụng trong vật lí. Dạng tổng quát của một phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai của hàm hai biến số $u(x, y)$ là:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y). \quad (3.1)$$

Phương trình được gọi là *thuần nhất* nếu $G(x, y) \equiv 0$, còn khi $G(x, y) \neq 0$ với mọi *x, y* thì phương trình là *không thuần nhất*.

3.1.2. Phân loại

Khi nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai, tùy thuộc vào giá trị của các hệ số *A*, *B* và *C*, phương trình (3.1) có thể được phân ra thành ba loại: *elliptic*, *parabolic* và *hyperbolic*. Cụ thể:

- Khi $B^2 < AC$ trong miền Ω nào đó thì (3.1) đưa được về dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+E_1\frac{\partial u}{\partial \eta}+F_1.u=G_1(\xi,\eta). \quad (3.2)$$

Lúc đó, (3.2) được gọi là dạng chính tắc của *phương trình elliptic* trong miền Ω. Dạng đơn giản nhất của phương trình elliptic là phương trình Laplace.

- Khi $B^2 > AC$ trong miền Ω thì (3.1) đưa được về dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D_2\frac{\partial u}{\partial \xi}+E_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+F_2.u=G_2(\xi,\eta). \quad (3.3)$$

Phương trình (3.3) được gọi là dạng chính tắc của *phương trình hyperbolic* trong miền Ω. Dạng đơn giản nhất của phương trình này là phương trình sóng một chiều.

- Khi $B^2 = AC$ trong miền Ω thì có thể đưa (3.1) về dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D_3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_3.u = G_{31}(\xi, \eta)\,. \tag{3.4}$$

Phương trình (3.4) được gọi là dạng chính tắc của *phương trình parabolic*. Dạng đơn giản nhất của phương trình parabolic là phương trình truyền nhiệt.

3.1.3. Điều kiện ban đầu và điều kiện biên

Các phương trình toán học mô tả hệ vật lí thông qua các tham số (ví dụ như các đại lượng vật lí) thường được xác định trong một miền Ω nào đó, miền này được giới hạn bởi biên *C*. Khi đó, mối liên hệ giữa các quá trình vật lí xảy ra ở bên ngoài với bên trong miền Ω cần được xem xét khi xây dựng mô hình toán học. Mối liên hệ này được phản ánh trên biên *C* giới hạn hai miền. Lúc đó, những ràng buộc về mối liên hệ giữa các tham số và các đạo hàm của chúng trên biên của miền khảo sát được gọi là *các điều kiện biên*. Bài toán có sử dụng các điều kiện biên được gọi là *bài toán biên*. Chúng ta có thể phân ra ba loại bài toán biên:

- Nếu hàm phải tìm *u* được mô tả trên biên *C* thì bài toán biên được gọi là *bài toán Dirichlet*.

- Nếu $\frac{\partial u}{\partial n}$ (là đạo hàm của *u* theo hướng pháp tuyến của *C*) được cho trên *C*, thì ta có *bài toán Neumann*.

- Nếu cho *u* trên một phần của biên *C* và cho $\frac{\partial u}{\partial n}$ trên phần còn lại của *C* thì bài toán biên được gọi là *bài toán hỗn hợp*.

Trong vật lí, chúng ta thường phân biệt *biến thời gian* và *biến không gian* (biến tọa độ thực) để tiện khảo sát và tìm ý nghĩa của chúng. Điều này cũng có nghĩa là miền Ω được tách thành miền không gian

V (được giới hạn bởi biên *S*) và miền thời gian (được giới hạn trong khoảng thời gian *T*). Khi đó chúng ta cần hiểu *điều kiện biên là cho biết quá trình xảy ra ở trên biên S*. Còn *điều kiện đầu là cho biết trạng thái của hệ tại thời điểm ban đầu của miền thời gian khảo sát*.

Đối với các *quá trình dừng* (không phụ thuộc vào thời gian) thì bài toán chỉ cần điều kiện biên và đấy là một *bài toán Dirichlet*. Ví dụ như quá trình truyền nhiệt dừng, phương trình của thế tĩnh điện, phương trình Schrodinger không tương đối tính ở trạng thái dừng, ...

Đối với quá trình vật lí xảy ra trong cả miền không gian vô hạn, lúc đó bài toán chỉ còn điều kiện ban đầu và được gọi là *bài toán Cauchy*. Ví dụ: dao động ngang của sợi dây đàn hồi có chiều dài vô hạn.

3.1.4. Khái niệm về tính đặt đúng đắn bài toán biên

Sự đặt đúng đắn của bài toán biên liên quan đến sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán. Nếu số các điều kiện không đủ thì có thể tồn tại nhiều nghiệm. Nếu số điều kiện là thừa thì có thể dẫn tới bài toán vô nghiệm. Vì vậy, *một mô hình toán học được coi là thỏa đáng nếu từ các điều kiện biên và điều kiện ban đầu đã cho thì bài toán có nghiệm duy nhất*. Tuy nhiên, chính điều kiện đó cũng chưa đủ. Thật vậy, trong mỗi bài toán biên đều gắn liền với một hiện tượng vật lí và bài toán đấy phải là nghiệm duy nhất của mô hình đặt ra thì mới đảm bảo được tính nhân quả. Mặt khác, các điều kiện biên và điều kiện đầu liên quan đến các giá trị được xác định bằng thực nghiệm nên có sai số nhất định. Nếu các điều kiện của bài toán thay đổi ít nhưng kéo theo thay đổi lớn về nghiệm thì bài toán vô nghĩa. Do đó, *bài toán được coi là đặt đúng đắn nếu*:

- *Với mỗi điều kiện cho trước đều tồn tại nghiệm của bài toán.*
- *Nghiệm được tìm là duy nhất.*
- *Nghiệm phải phụ thuộc liên tục vào các điều kiện cho trước.*

Trong chương này, các bài toán đều được xem là đặt đúng đắn.

3.1.5. Một số phương pháp giải bài toán biên

Các bài toán biên liên quan đến phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai có thể được giải bằng các phương pháp khác nhau. Sau đây là một số phương pháp thường được sử dụng trong vật lí.

a) Phương pháp nghiệm tổng quát

Theo phương pháp này, trước tiên ta tìm nghiệm tổng quát rồi sau đó tìm nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện biên. Hai định lí sau đây làm cơ sở cho phương pháp nói trên:

- **Định lí 1** *(Nguyên lí chồng chất nghiệm):* Nếu $u_1, u_2, ...u_n$ là các nghiệm của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, thuần nhất thì $C_1u_1 + C_2u_2 + ... + C_nu_n$ cũng là nghiệm, với C_1, C_2, ...C_n là các hằng số.
- **Định lí 2***:* Nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính không thuần nhất thu được bằng cách cộng nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Nghiệm tổng quát thường được tìm theo các phương pháp đã sử dụng cho phương trình vi phân thường.

b) Phương pháp tách biến

Theo phương pháp này, ta giả sử rằng nghiệm cần tìm *u* có thể biểu diễn được dưới dạng tích của các hàm chưa biết mà mỗi hàm chỉ phụ thuộc vào một trong các biến độc lập. Khi đó, thay vào phương trình đạo hàm riêng ta sẽ được các phương trình vi phân thường với các điều kiện phụ mà ta đã biết cách giải. Phương pháp tách biến tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng gồm 3 bước cơ bản sau đây:

Bước 1: Tách biến bằng cách đặt nghiệm cần tìm dưới dạng tích của các hàm ứng với các biến độc lập để chuyển phương trình đạo hàm riêng thành hệ các phương trình vi phân thường mà ta đã biết cách giải. Khi đó, có bao nhiêu biến số độc lập trong phương trình đạo hàm riêng sẽ có tương ứng bấy nhiêu số phương trình vi phân thường.

Bước 2: Giải tìm nghiệm của các phương trình vi phân thường (sau khi tách biến) và cho thỏa mãn các điều kiện biên.

Bước 3: Tìm nghiệm (thu được ở bước 2) thỏa mãn các điều kiện ban đầu ta được nghiệm riêng của bài toán.

Chương này sẽ trình bày chi tiết áp dụng của phương pháp tách biến cho các phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt.

c) Phương pháp dùng các biến đổi tích phân

Phương pháp này dùng các phép biến đổi tích phân như biến đổi Fourier, biến đổi Laplace. Ý tưởng của phương pháp này là chuyển các toán tử đạo hàm riêng theo một biến nào đấy (trong không gian cấu hình) thành biểu thức đại số đơn giản hơn để ta tiến hành tìm nghiệm (trong không gian ảnh), sau đó thực hiện biến đổi ngược để thu được nghiệm của bài toán. Phương pháp này được trình bày ở chương 4.

d) Phương pháp chuỗi lũy thừa

Phương pháp chuỗi lũy thừa được sử dụng để xác định hàm cần tìm (tức là nghiệm) dưới dạng chuỗi lũy thừa của các biến số (nhân với hệ số khai triển cần tìm) xung quanh một điểm nào đó (có thể là điểm kì dị). Bằng cách thay chuỗi lũy thừa vào phương trình đạo hàm riêng/vi phân rồi thực hiện đồng nhất thức hai vế chúng ta tìm được giá trị của các hệ số khai triển. Phương pháp này có thể tham khảo ở các tài liệu [3, 6, 17].

e) Phương pháp hàm Green

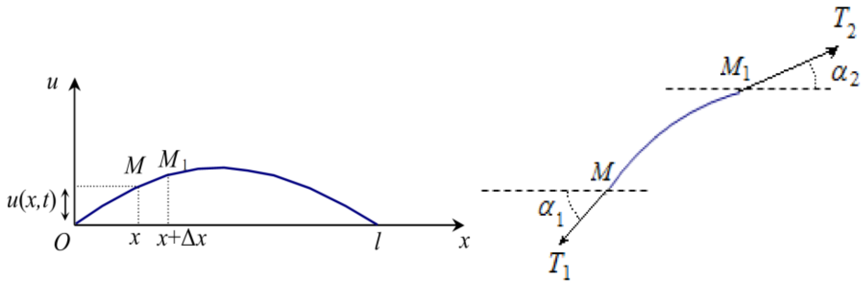
Phương pháp hàm Green là phương pháp không giải trực tiếp phương trình vi phân mà tìm hàm Green thông qua việc giải phương trình khác sau đó biểu diễn nghiệm cần tìm thông qua hàm Green. Phương pháp này có thể tham khảo trong các tài liệu [2, 4, 6].

3.2. Phương trình sóng một chiều

3.2.1. Dao động của sợi dây đàn hồi căng ngang

Xét sợi dây đàn hồi được căng ngang theo trục Ox như trên hình 3.1. Giả sử dây có độ dài l và được gắn chặt tại các mút $x = 0$ và $x = l$.

Kéo sợi dây lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ và thả cho dao động.



Hình 3.1. Mô hình sợi dây đàn hồi căng ngang (bên trái) và sự biểu diễn các lực đàn hồi tác dụng lên cung MM_1(bên phải).

Để thiết lập quy luật dao động của sợi dây, ta đơn giản mô hình bởi các giả thiết: *sợi dây rất mảnh và đàn hồi một cách lý tưởng; lực chống uốn là không đáng kể; ngoại lực tác dụng trên một đơn vị dài của dây là* $p(x,t)$ *và có phương luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng, vuông góc với trục* O*x*. Khi đó, mỗi điểm của sợi dây chỉ dịch chuyển nhỏ trong mặt phẳng thẳng đứng, phương dịch chuyển luôn vuông góc với trục O*x*. Đồng thời góc tạo bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm bất kỳ trên sợi dây với trục *Ox* cũng rất nhỏ.

Quy luật dao động của sợi dây được mô tả thông qua sự thay đổi độ lệch $u(x,t)$ của mỗi điểm trên sợi dây so với trục O*x*. Xét điểm *M* trong không gian và ta tưởng tượng tách một cung rất nhỏ MM_1 trên sợi dây (Hình 3.1). Các lực tác dụng lên MM_1 là: $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{p}\,\Delta x$. Theo định luật 2 Newton, phương trình động lực học của MM_1 là:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{p}\,\Delta x = \rho \Delta x \vec{a}\,, \tag{3.5a}$$

với $\vec{a}$ là gia tốc của cung MM_1.

Theo phương dao động *u*, phương trình (3.5a) được viết thành:

$$T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 + p\Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.5b}$$

trong đó, ρ là mật độ khối lượng dài của sợi dây.

Tương tự, theo phương Ox, phương trình (3.5a) được viết :

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0. \tag{3.6}$$

Vì điểm M được chọn bất kỳ trên sợi dây nên (3.6) chỉ thỏa mãn khi:

$$T_2\cos\alpha_2 = T_1\cos\alpha_1 = T = const. \tag{3.7}$$

Chia hai vế của (3.5b) cho $T\Delta x$ đồng thời sử dụng (3.7), ta được:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[tg\alpha_2 - tg\alpha_1\right] + \frac{p}{T} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3.8}$$

Cho $M_1 \to M$ (tức là cho $\Delta x \to 0$) và chú ý đến tính chất của đạo hàm:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[tg\alpha_2 - tg\alpha_1\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u\left(x+\Delta x, t\right)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

ta được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p}{T} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3.9}$$

Đặt $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ và $g(x,t) = \dfrac{p(x,t)}{\rho}$ phương trình (3.9) trở thành:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t). \tag{3.10}$$

Phương trình (3.10) mô tả quy luật thay đổi của độ lệch $u(x,t)$ đối với mỗi điểm trên sợi dây và được gọi là *phương trình dao động của sợi dây* đàn hồi.

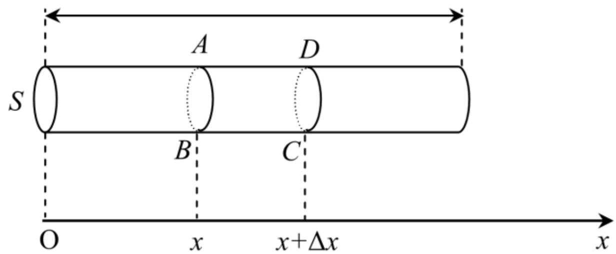
Nếu ngoại lực $p(x, t) \neq 0$ thì $g(x, t) \neq 0$. Khi đó (3.10) là *phương trình không thuần nhất*, mô tả *dao động cưỡng bức* của sợi dây.

Nếu không có ngoại lực tác dụng lên vật thì $p(x,t) \equiv 0$ nên $g(x,t) \equiv 0$. Lúc đó, (3.10) trở thành *phương trình thuần nhất* mô tả *dao động tự do* của sợi dây:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{3.11}$$

3.2.2. Dao động dọc của một thanh

Xét một thanh đàn hồi, đồng chất với mật độ khối lượng ρ, có tiết diện không đổi S và có độ dài l đặt dọc theo trục x như trên hình 3.2. Giả thiết thanh dao động dọc theo trục Ox (bằng cách nén hoặc kéo giãn thanh theo trục Ox rồi buông ra).



Hình 3.2. Mô hình dao động của thanh đàn hồi.

Để đơn giản, ta xem thanh được gắn chặt tại đầu mút $x = 0$. Giả sử x là hoành độ của tiết diện AB tại vị trí cân bằng lúc $t = 0$, gọi $u(x,t)$ là độ dịch chuyển của AB ở thời điểm t. Do đó, tọa độ của tiết diện AB tại thời điểm t sẽ là $x + u(x,t)$.

Xét chuyển động của một đoạn nhỏ (mẩu) $ABCD$ nằm ở vị trí cân bằng trên đoạn $[x, x+\Delta x]$ của trục x. Bỏ qua những lực ngoài tác dụng lên nó theo phương Ox trừ lực đàn hồi xuất hiện trên hai thiết diện ở hai đầu của mẩu. Ở thời điểm t, độ dài của là $l = u(x+\Delta x, t) - u(x, t)+ \Delta x$, nó lệch so với khi ở vị trí cân bằng một đoạn $\Delta l = u(x+\Delta x, t) - u(x, t)$ nên độ giãn tương đối của nó có dạng [5]:

$$\frac{u(x+\Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}. \tag{3.12}$$

Chuyển qua giới hạn của (3.12) khi $\Delta x \to 0$, ta có độ giãn tương đối của mẩu khi được đặt tại điểm có tọa độ x ở vị trí cân bằng sẽ là:

$$u_x(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \tag{3.13}$$

Theo định luật Hooke, lực đàn hồi tác dụng lên các thiết diện *AB* và *CD* lần lượt là $ES\,u_x(x,t)$ và $ES\,u_x(x+\Delta x, t)$. Do đó, lực tác dụng lên mẫu thanh *ABCD* ở thời điểm *t* là:

$$ES\,[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)], \tag{3.14}$$

với *E* đặc trưng cho tính đàn hồi của chất tạo nên thanh và được gọi là *suất Young.*

Theo định luật 2 Newton ta có:

$$ES\,[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] = \rho S\,\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3.15}$$

Chia cả hai vế của (3.15) cho Δx rồi chuyển qua giới hạn $\Delta x \to 0$, ta được:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \text{ với } a = \sqrt{E/\rho}. \tag{3.16}$$

Biểu thức (3.16) được gọi là phương trình dao động tự do của thanh đàn hồi. Nếu thanh chịu tác dụng của ngoại lực có giá trị $p(x, t)$ lên một đơn vị chiều dài theo phương *Ox,* thì phương trình dao động dọc của thanh sẽ có dạng:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t), \tag{3.16a}$$

với $g(x,t) = p(x,t)/\rho$.

Như vậy,về mặt hình thức thì phương trình dao động của sợi dây và của thanh đàn hồi đều có dạng giống nhau nên được gọi chung là *phương trình truyền sóng một chiều.* Phương trình truyền sóng là trường hợp đơn giản của phương trình loại *hyperbolic*.

3.2.3. Các điều kiện ban đầu và điều kiện biên

Để xác định dao động của dây hoặc của thanh đàn hồi, chúng ta cần tìm nghiệm của các phương trình (3.10) hoặc (3.16). Về mặt toán học các phương trình trên có vô số nghiệm, nghĩa là sẽ có nhiều hiện tượng vật lí cùng thỏa mãn các phương trình trên. Vì vậy, để mô tả đúng hiện tượng vật lí ta cần xác định các điều kiện ban đầu và điều kiện biên để bài toán được đặt đúng đắn.

a) Các điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3.17}$$

cho biết độ lệch ban đầu của điểm x trên sợi dây hoặc của thanh, còn

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) \tag{3.18}$$

cho biết phân bố vận tốc ban đầu của các điểm trên sợi dây hoặc trên thanh.

b) Các điều kiện biên: *điều kiện biên phụ thuộc vào tính chất của từng bài toán cụ thể. Ta xét riêng trường hợp của dây và của thanh.*

* ***Đối với dao động của sợi dây:***

Nếu hai mút được gắn chặt:

$$u(0,t) = u(l, t) = 0. \tag{3.19}$$

Nếu hai mút chuyển động với quy luật $\mu_1(t)$ và $\mu_2(t)$ cho trước thì:

$$u(0, t) = \mu_1(t)\ ;\ u(l, t) = \mu_2(t). \tag{3.20}$$

* ***Đối với dao động của thanh đàn hồi***:

Nếu tại mút $x = 0$ là *có ngoại lực* $\bar{v}(t)$ tác dụng thì ta có:

$$ES\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \bar{v}(t)\text{, hay}\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = v(t), \tag{3.21}$$

với

$$v(t) = \frac{\bar{v}(t)}{ES}.$$

Nếu tại mút $x = 0$ là *tự do* thì $v(t) = 0$, lúc đó điều kiện biên có dạng:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{3.22}$$

Nếu tại mút $x = 0$ *được gắn đàn hồi* thì ta có:

$$ES\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\alpha.u(0,t)$$

hay

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=0} = -hu(0,t)\,, \qquad (3.23)$$

trong đó α là hằng số (gọi là *hệ số đàn hồi*) và $h = \frac{\alpha}{ES}$.

3.3. Các trường hợp truyền sóng một chiều

3.3.1. Tính duy nhất nghiệm

Trước khi giải phương trình lan truyền sóng chúng ta xem xét tính duy nhất nghiệm. Giả sử, u_1, u_2 là hai nghiệm của (3.11) thỏa mãn các điều kiện đầu và điều kiện biên đã nêu trên đây. Đặt: $v = u_1 - u_2$ thì v cũng thỏa mãn phương trình lan truyền sóng:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\,, \qquad (3.24)$$

với các điều kiện đầu và các điều kiện biên đều bằng không. Để chứng minh tính duy nhất nghiệm, ta cần chỉ ra $v(x, t) \equiv 0$ với $\{0 \le x \le l;\ 0 \le t\}$.

Bỏ qua thế năng trọng trường, nếu độ lệch của mỗi điểm x là $v(x, t)$ thì cơ năng của sợi dây tại thời điểm t bất kỳ là:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [a^2(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2]dx\,, \qquad (3.25)$$

ở đây, số hạng đầu dưới dấu tích phân biểu thị thế năng đàn hồi (liên quan đến độ căng của dây), số hạng thứ hai biểu thị động năng.

Thực hiện đạo hàm theo t dưới dấu của tích phân (3.25) ta được:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l [a^2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}]dx\,. \qquad (3.26)$$

Tính tích phân từng phần số hạng đầu của (3.26) đồng thời chú ý $\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}$ ta được:

$$\int_0^l a^2 \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}dx = a^2 \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}\Bigg|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial t}dx\,. \qquad (3.27)$$

Do sự triệt tiêu của điều kiện biên: $v(0, t) = v(l, t) \equiv 0$ với $t \geq 0$ nên vế phải của (3.27) đồng nhất bằng không. Vì vậy:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t}[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}]dx \equiv 0\,. \qquad (3.28)$$

Từ đấy suy ra $E(t) = const$. Mặt khác, do các điều kiện ban đầu và điều kiện biên đều bằng 0 nên $E(0) = 0$. Từ đây suy ra $E(t) \equiv 0$, $\forall t \geq 0$. Cần lưu ý rằng, do hàm dưới dấu tích phân năng lượng (3.25) là liên tục và không âm nên $E(t) \equiv 0$ chỉ thỏa mãn khi:

$$a^2(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 \equiv 0\,. \qquad (3.29)$$

Hay

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \equiv 0 \text{ và } \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \equiv 0, \forall x \in [\,0, l\,], \forall t \geq 0\,. \qquad (3.30)$$

Vậy, $v(x,t) = const$, mà $v(x,0) = 0$, nên $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \equiv 0$, nghĩa là bài toán trên có nghiệm duy nhất $u_1 \equiv u_2$.

3.3.2. Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu

Giả sử $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ là hai nghiệm của phương trình truyền sóng thuần nhất cùng thỏa mãn các điều kiện biên và các điều kiện đầu:

$$u_i(x,0) = f_i(x)\,,\ \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = F_i(x) \ \text{ (với } i = 1,\ 2). \qquad (3.31)$$

Đặt $\bar{f}(x) = f_1(x) - f_2(x)$ và $\bar{F}(x) = F_1(x) - F_2(x)$, ta cần chứng minh nghiệm phụ thuộc liên tục vào điều kiện đầu, nghĩa là với một sự thay đổi nhỏ của $\bar{f}(x)$ và $\bar{F}(x)$ thì $v(x, t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ cũng thay đổi nhỏ.

Thật vậy, hiệu $v(x,t)$ cũng thỏa mãn các điều kiện và các điều kiện ban đầu:

$$v(x,0) = \bar{f}(x); \quad \left.\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right|_{t=0} = \bar{F}(x). \tag{3.32}$$

Như chúng ta đã biết, tích phân năng lượng $E(t)$ không phụ thuộc thời gian, nên $E(t)=E(0)$ hay:

$$\frac{1}{2}\int_0^l [a^2(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2]dx = \frac{1}{2}\int_0^l [a^2 \bar{f}^2(x) + \bar{F}^2(x)]dx. \tag{3.33}$$

Do giả thiết $\bar{f}(x)$ và $\bar{F}(x)$ khá bé nên bình phương của chúng cũng khá bé, nghĩa là vế phải của (3.33) cũng khá bé. Khi đó ta có thể chọn:

$$\frac{a^2}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \le \varepsilon^2 \text{ hay } \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \le \frac{2\varepsilon^2}{a^2}. \tag{3.34}$$

Mặt khác:

$$\int_0^x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx = v(x,t) - v(0,t) = v(x,t) \text{ do } v(0,t) = 0. \tag{3.35}$$

Khi đó:

$$|v(x,t)| \le \int_0^x \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| dx \le \int_0^l \left|\frac{\partial v}{\partial v}\right| \le \left(\int_0^l 1^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\right)^{1/2} \le \frac{l\sqrt{2}}{a}\varepsilon. \tag{3.36}$$

Điều này cho thấy, khi $\bar{f}(x)$ và $\bar{F}(x)$ khá bé về trị tuyệt đối thì $v(x,t)$ cũng khá bé về trị tuyệt đối, nghĩa là nghiệm của bài toán trên phụ thuộc liên tục vào điều kiện đầu và điều kiện biên.

Từ các kết quả được rút ra trong hai mục trên ta đi đến kết luận: *bài toán hỗn hợp mô tả sự lan truyền sóng trên đây đã được đặt đúng đắn.*

3.3.3. Dao động tự do của dây hữu hạn có hai đầu mút gắn chặt

Xét một sợi dây có độ dài l được căng ngang dọc theo trục Ox trên đoạn $[0, l]$, có hai mút gắn chặt và không chịu tác dụng của ngoại lực. Độ lệch ban đầu và vận tốc ban đầu của sợi dây tương ứng là $f(x)$ và $F(x)$. Quy luật dao động của điểm x bất kỳ trên sợi dây là nghiệm của phương trình (3.11) trong miền$\{0 \le x \le l\ ;\ T \ge 0\}$ thỏa mãn các điều kiện ban đầu (3.17), (3.18) và các điều kiện biên (3.19).

Ta cần chú rằng, do phương trình (3.11) là tuyến tính và thuần nhất nên bài toán luôn có nghiệm tầm thường $u(x,\ t) \equiv 0$. Tuy nhiên, nghiệm này không phản ánh tính chất động học của hệ vật lí được khảo sát. Vì vậy, chúng ta cần tìm nghiệm không tầm thường của bài toán. Mặt khác, các nghiệm riêng của (3.11) luôn thỏa mãn *tính chất tuyến tính*, nghĩa là tổng các nghiệm riêng cũng là nghiệm của phương trình này.

Chúng ta sẽ giải phương trình sóng một chiều (3.11) bằng phương pháp tách biến theo 3 bước như đã trình bày ở mục 3.1.6.

Bước1: *Tách biến và chuyển về hệ các phương trình vi phân thường*.

Trong trường hợp này, nghiệm là hàm có hai biến số độc lập nên ta tìm nghiệm riêng dưới dạng tích của hai hàm:

$$u(x,t) = X(x)\ T(t), \tag{3.37}$$

với, $X(x)$ và $T(t)$ tương ứng là các hàm chỉ phụ thuộc vào biến x và biến t.

Lần lượt đạo hàm $u(x,t)$ hai lần theo các biến x và t sau đó thay vào (3.11) ta được:

$$XT'' = a^2 X'' T \quad \text{hay} \frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}. \tag{3.38}$$

Vế trái của biểu thức trên là hàm chỉ phụ thuộc vào x, còn vế phải chỉ phụ thuộc vào t nên (3.38) chỉ thỏa mãn khi cả hai vế cùng bằng hằng số nào đấy (ký hiệu là $-\lambda$). Khi đó, phương trình đạo hàm riêng (3.11) được chuyển thành hệ hai phương trình vi phân thường sau đây:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{3.39}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{3.40}$$

Bước 2: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên.*

Từ các điều kiện biên (3.19) ta có:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \text{ và } u(l,t) = X(l)T(t) = 0. \tag{3.41}$$

Để tránh nghiệm tầm thường $u(x,t) \equiv 0$ hay $T(t) \equiv 0$ thì điều kiện biên (3.11) sẽ dẫn đến:

$$X(0) = 0 \text{ và } X(l) = 0. \tag{3.42}$$

Cần chú ý rằng, dạng nghiệm của (3.39) và (3.40) phụ thuộc vào dấu của λ. Xét các trường hợp sau đây đối với λ:

- *Nếu* $\lambda = 0$: nghiệm tổng quát của (3.39) là: $X(x) = bx + d$. Khi đó, các điều kiện biên (3.41) dẫn đến $b = d = 0$, hay $X(x) \equiv 0$, tức là chỉ có nghiệm tầm thường nên ta loại bỏ.
- *Nếu* $\lambda = -c^2 < 0$: nghiệm tổng quát của (3.39) là:

$$X(x) = C_1e^{cx} + C_2e^{-cx}. \tag{3.43}$$

Khi đó, từ các điều kiện biên (3.41) sẽ dẫn đến:

$$C_1 + C_2 = 0,$$
$$C_1e^{cl} + C_2e^{-cl} = 0.$$

Từ đây rút ra, $C_1 = C_2 = 0$, hay $X(x) \equiv 0$ nghĩa là $u(x,t)$ cũng là nghiệm tầm thường của bài toán nên ta loại bỏ.

- *Nếu* $\lambda = c^2 > 0$: nghiệm tổng quát của (3.39) là:

$$X(x) = A\sin cx + B\cos cx. \tag{3.44}$$

Từ các điều kiện biên (3.41) suy ra: $X(0) = B = 0$ và $X(l) = A\sin cl = 0$. Để có nghiệm không tầm thường cần phải lấy $A \neq 0$. Vì vậy, $\sin cl = 0$, hay:

$$c = \frac{n\pi}{l} = c_n \text{, với } n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.45}$$

Như vậy, (3.39) có nghiệm không tầm thường nếu

$$\lambda = c^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \lambda_n. \tag{3.46}$$

Nghiệm phụ thuộc không gian lúc đó được viết:

$$X(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad (n = 1, 2, 3, ...). \tag{3.47}$$

Ở đây, do A_n là hằng số có dấu tuỳ ý nên ta chỉ cần chọn các giá trị dương của n. Đặt:

$$\omega_n = ac_n = \frac{n\pi a}{l} \tag{3.48}$$

và thay biểu thức của ω_n vào (3.40) ta được nghiệm tổng quát:

$$T_n(t) = B_n\cos\omega_n t + D_n\sin\omega_n t. \tag{3.49}$$

Do đó nghiệm của (3.11) thỏa mãn các điều kiện biên (3.19) là:

$$u_n(x,t) = (a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \ (n = 1, 2,...), \tag{3.50}$$

trong đó: $a_n = A_nB_n$; $b_n = A_nD_n$.

Các hàm $u_n(x,t)$ được gọi là các *hàm riêng* của dao động của sợi dây; còn $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$ được gọi là các *trị riêng* và chính là *tần số dao động riêng* của sợi dây.

Bước 3: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện đầu.*

Ta thấy các nghiệm $u_n(x,t)$ trong (3.50) là hàm tuần hoàn, trong khi các điều kiện đầu mô tả theo $F(x)$ và $f(x)$ nói chung không phải là các hàm tuần hoàn. Tức là tổng hữu hạn của các $u_n(x, t)$ nhìn chung cũng không thỏa mãn các điều kiện đầu nói trên. Vì vậy, dựa vào tính chất tuyến tính ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tổng vô hạn của các $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{3.51}$$

Cho $u(x,t)$ thỏa mãn điều kiện đầu (3.17) ta được:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x)\,. \qquad (3.52)$$

Để tính a_n ta nhân hai vế (3.52) với $\sin\dfrac{m\pi x}{l}$ sau đó lấy tích phân theo x trên đoạn $[0,\ l]$ đồng thời chú ý đến tính trực giao của các hàm $\sin\dfrac{m\pi x}{l}$ và $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$. Kết quả tính toán thu được:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad , \quad n=1,\ 2,\ldots \qquad (3.53)$$

Lấy đạo hàm (3.51) theo t và cho thỏa mãn điều kiện đầu (3.18) ta được:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=F(x)\,. \qquad (3.54)$$

Ta thấy $\omega_n b_n$ liên hệ với $F(x)$ trong (3.54) hoàn toàn tương tự như a_n với $f(x)$ trong (3.52). Vì vậy, từ kết quả (3.53) ta dễ dàng suy ra:

$$b_n=\frac{2}{\omega_n l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=1,\ 2,\ldots (3.55)$$

Vậy nghiệm của bài toán có dạng (3.51) với các hệ số a_n và b_n được xác định theo (3.53) và (3.54).

Ý nghĩa vật lí

Mỗi hàm riêng u_n biểu thị một hàm dao động điều hoà với tần số ω_n và được gọi là *mode* (hay *dao động riêng*) *thứ n*. Mode đầu tiên (n = 1) được gọi là *mode cơ bản*, các mode tiếp theo được gọi là các *họa âm*. Tần số của mode thứ n phụ thuộc vào lực căng T, khối lượng riêng ρ và chiều dài l của sợi dây theo hệ thức:

$$\omega_n=\frac{n\pi a}{l}=\frac{n\pi}{l}\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\rho}}\,. \qquad (3.56)$$

Từ (3.56) ta có thể lý giải được lý do các nhạc cụ dùng dây (ví dụ như đàn ghi ta, đàn thập lục ...) có độ cao âm giữa các dây là khác nhau. Sự khác nhau về độ cao âm của các sợi dây phát ra là do khối lượng riêng và sức căng của các sợi dây không giống nhau. Với mỗi sợi dây xác định, chúng ta có thể thay đổi độ cao âm của các nhạc cụ đó bằng cách thay đổi sức căng *T* của các sợi dây.

Để xét dáng điệu của mỗi dao động riêng, ta viết lại $u_n(x,t)$ dưới dạng:

$$u_n(x,t) = Q_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin(\omega_n t+\varphi_n)\,, Q_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ,\ tg\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}. \quad (3.57)$$

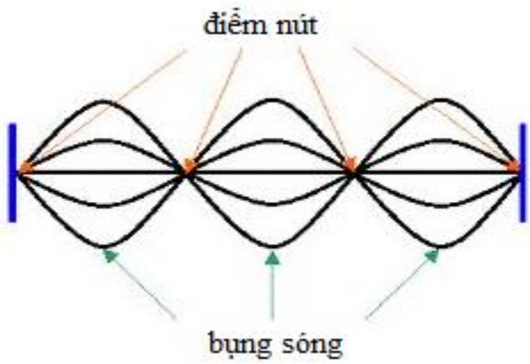
Biểu thức (3.57) cho thấy, mỗi điểm trên sợi dây ứng với mode thứ *n* đều dao động điều hoà với tần số ω_n và biên độ $Q_n \sin\frac{n\pi x}{l}$. Vì vậy, biên độ dao động phụ thuộc vào vị trí của điểm *x*. Điều lý thú ở đây là tồn tại các điểm trên sợi dây mà tại đó hầu như không dao động, các điểm này được gọi là các *điểm nút*. Vị trí điểm nút thứ *n* được xác định từ phương trình:

$$Q_n \sin\frac{n\pi x_n}{l} = 0.$$

Từ đây suy ra tọa độ các điểm nút thứ *n* là:

$$x_n = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, ..., \frac{(n-1)l}{n}\ . \quad (3.58)$$

Từ đây ta thấy, mode thứ *n* có tất cả (*n* - 1) nút trên đoạn [0, *l*]. Xen giữa hai nút sóng liên tiếp sẽ là *bụng sóng* mà trong khoảng đó tồn tại điểm dao động với biên độ mạnh nhất, gọi là *bụng sóng*. Hình ảnh sóng như trên được gọi là các *sóng đứng* và được minh họa như trên hình 3.3.



Hình 3.3. Minh họa các điểm nút và bụng sóng của các sóng đứng.

Bây giờ chúng ta xem xét trường hợp đặc biệt khi vận tốc ban đầu bằng không $F(x) \equiv 0$. Khi đó, $b_n = 0$ và nghiệm bài toán trở thành:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n t \sin\frac{n\pi x}{l}, \ \omega_n = \frac{n\pi a}{l}. \qquad (3.59)$$

Sử dụng công thức:

$$\cos\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{n\pi}{l}(x-at) + \sin\frac{n\pi}{l}(x+at)\right]$$

ta được:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}(x-at) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}(x+at). \qquad (3.60)$$

Hai chuỗi trong vế phải của (3.60) tương ứng chính là chuỗi Fourier sin của hàm $f(x - at)$ và $f(x+at)$. Nếu gọi f^* là *khai triển tuần hoàn lẻ* của f với chu kỳ $2l$ thì $f(x) = \frac{1}{2}[f^*(x- at) - f^*(x+ at)]$. Mặt khác, ta biết rằng $f^*(x- at)$ và $f^*(x+at)$ tương ứng biểu thị sóng truyền theo chiều dương và chiều âm của trục x nên $u(x,t)$ là chồng chập của hai sóng đó [3, 16].

Ví dụ 3.1: Tìm dao động của sợi dây dài l có hai mút gắn chặt tại $x = 0$ và $x = l$. Biết vận tốc ban đầu của mỗi điểm trên sợi dây đều bằng không và độ lệch ban đầu được cho bởi:

$$u(x,0)=f(x)=\frac{4\alpha x(l-x)}{l^2}\quad ;\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x)\equiv 0 \qquad (3.61)$$

với α là hằng số.

Ta có, do vận tốc ban đầu bằng 0 nên hệ số b_n= 0, còn a_n được tính theo (3.53):

$$a_n=\frac{8\alpha}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{16\alpha}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}0, & \text{khi } n=2m\ (m=0,1,2\cdots)\\ \dfrac{32\alpha}{(2m+1)^3\pi^3}, & \text{khi } n=2m+1.\end{cases}$$

Thay b_n= 0 và a_n vừa tính được ở trên vào (3.51) ta được nghiệm của bài toán:

$$u(x,t)=\frac{32\alpha}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2m+1)\pi at}{l}. \qquad (3.62)$$

3.3.4. Dao động cưỡng bức của sợi dây có hai mút gắn chặt

Trong trường hợp này, chuyển động của sợi dây tuân theo phương trình truyền sóng không thuần nhất:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t) \qquad (3.63)$$

trong miền $\{0\le x\le l\,;\,0\le t\}$ với các điều kiện ban đầu:

$$u(x,0)=f(x),\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x) \qquad (3.64)$$

và các điều kiện biên:

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0. \qquad (3.65)$$

Ta có thể tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tổng của hai hàm số:

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \qquad (3.66)$$

trong đó, $w(x,t)$ thỏa mãn phương trình thuần nhất dạng (3.10) và các điều kiện (3.64) ÷ (3.65), còn $v(x,t)$ thỏa mãn phương trình không thuần nhất dạng (3.63) với các điều kiện biên (3.65) và các điều kiện đầu:

$$v(x,0)=0 \qquad (3.67)$$

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \qquad (3.68)$$

Ta đã biết cách tìm hàm $w(x,t)$ như trong tiểu mục 3.3.3 nên nhiệm vụ còn lại là tìm nghiệm của $v(x,t)$. Thông thường, hàm $v(x,t)$ có thể được tìm dưới dạng chuỗi:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (3.69)$$

trong đó, chuỗi hàm (3.69) hội tụ đều, có thể lấy đạo hàm theo x và t hai lần. Hàm $v(x,t)$ như thế thỏa mãn các điều kiện biên (3.65). Ta cần tìm $T_n(t)$ để hàm $v(x,t)$ thỏa mãn phương trình (3.63) và các điều kiện đầu (3.67) ÷ (3.68).

Thay $v(x,t)$ ở (3.69) vào (3.63) ta được:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x,t). \qquad (3.70)$$

Nếu $g(x,t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier sin trong đoạn $[0, l]$:

$$g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ g_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (3.71)$$

thì ta có phương trình vi phân đối với T:

$$T_n''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=g_n(t). \qquad (3.72)$$

Để $v(x,t)$ thỏa mãn các điều kiện ban đầu (3.67) và (3.68) thì $T_n(t)$ phải thỏa mãn:

$$T_n(0)=0;\ \ T_n'(0)=0; \qquad n=1, 2, \ldots \qquad (3.73)$$

Người ta đã chứng minh được rằng [3, 5], nếu $g(x,t)$ có đạo hàm riêng theo x, liên tục đến cấp hai và thỏa mãn $g(0,t) = g(l, t) = 0$ với

$\forall t$ thì chuỗi hàm trong (3.69) với các T_n là nghiệm của (3.72), (3.73) sẽ hội tụ đều trên miền $\{0 \le x \le l;\ 0 \le t\}$ và có thể đạo hàm theo từng số hạng hai lần. Khi đó, chuỗi hàm (3.69) là nghiệm của bài toán.

3.3.5. Dao động cưỡng bức của sợi dây có hai mút chuyển động

Xét sợi dây chuyển động dưới tác dụng của ngoại lực và có hai mút chuyển động với quy luật cho trước. Lúc đó, chuyển động của sợi dây tuân theo phương trình sóng không thuần nhất với các điều kiện biên:

$$u(0,t) = h_1(t),\ \ u(l,t) = h_2(t)\,. \tag{3.74}$$

Các điều kiện đầu vẫn được giả thiết như (3.17) và (3.18).

Ta có thể tìm nghiệm bài toán trên dưới dạng:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{3.75}$$

trong đó:

$$w(x,t) = h_1(t) + \frac{x}{l}\left[h_2(t) - h_1(t)\right]; \tag{3.76}$$

còn hàm $v(x,t)$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_1(x,t) \tag{3.77}$$

$$g_1(x,t) = g(x,t) - h_1''(t) - \frac{x}{l}\left[h_2''(t) - h_1''(t)\right] \tag{3.78}$$

với các điều kiện biên $v(0,t) = v(l,\ t) = 0$ và các điều kiện đầu:

$$u(x,0) = f(x) - h_1(0) - \frac{x}{l}[h_2(0) - h_1(0)] = f_1(x) \tag{3.79}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial v}\right|_{t=0} = F(x) - \left.h_1'(t)\right|_{t=0} - \frac{x}{l}\left[\left.h_2'(t)\right|_{t=0} - \left.h_1'(t)\right|_{t=0}\right] = F_1(x)\,. \tag{3.80}$$

Như vậy, để tìm nghiệm của bài toán ta quy về việc tìm $v(x,t)$ của phương trình (3.77) thỏa mãn các điều kiện (3.79) và (3.80). Dễ thấy rằng, $v(x,t)$ ở đây đóng vai trò là $u(x,t)$ trong bài toán đã xét ở mục 3.3.4 bằng cách thay $g(x,t)$ bởi $g_1(x,t)$, $f(x)$ bởi $f_1(x)$ và $F(x)$ bởi $F_1(x)$.

3.3.6. Dao động của dây vô hạn. Công thức D' Alembert

Chúng ta mở rộng bài toán trên trong trường hợp sợi dây khá dài (có thể xem là vô hạn) và không chịu tác dụng của ngoại lực. Khi đó, ảnh hưởng của điều kiện biên đối với các điểm ở giữa sợi dây có thể được bỏ qua. Quy luật dao động của sợi dây thỏa mãn phương trình thuần nhất:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.81}$$

trong miền ($-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$), thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$$u(x,0) = f(x), \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{3.82}$$

Rõ ràng, (3.82) chính là bài toán Cauchy đối với phương trình (3.81). Ta thấy, bài toán này không bị ràng buộc bởi điều kiện biên nên lời giải có thể thực hiện thông qua hai bước sau:

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát.

Dùng phép đổi biến số: $\xi = x + at$, $\eta = x - at$. Áp dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp ta được:

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}, \quad u''_{tt} = a^2(u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}). \tag{3.83}$$

Thay các đạo hàm riêng (3.83) vào phương trình (3.82) ta được:

$$u''_{\xi\eta} = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng u'_{ξ} chỉ là hàm của ξ. Vì vậy ta đặt:

$$u'_{\xi} = \varphi_1(\xi),$$

với φ_1 là hàm tuỳ ý của biến ξ. Từ đó ta có:

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi_1(\xi)d\xi + \psi(\eta), \tag{3.84}$$

trong đó $\psi(\eta)$ là hàm tuỳ ý của biến η.

Vì φ_1 là hàm tuỳ ý của biến ξ nên $\varphi(\xi) = \int \varphi_1(\xi)d\xi$ cũng là hàm tuỳ ý của ξ. Do đó, ta có thể viết:

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta). \tag{3.85}$$

Thay trở lại biến cũ vào biểu thức (3.85) ta được:

$$u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at). \tag{3.86}$$

Biểu thức (3.86) chính là nghiệm tổng quát của phương trình (3.81).

Bây giờ ta tìm hiểu ý nghĩa vật lí của nghiệm $\psi(x - at)$. Giả sử tại điểm x_1 ở thời điểm t_1 hàm sóng của trạng thái là $\psi_1(x_1 - at_1)$. Đến thời điểm t_2 sau đó thì trạng thái được mô tả bởi hàm $\psi_2(x_2 - at_2)$. Ta chọn các điểm x_1, x_2 và các thời điểm t_1, t_2 sao cho:

$$x_1 - at_1 = x_2 - at_2 \tag{3.87}$$

nghĩa là

$$x_2 - x_1 = a(t_2 - t_1). \tag{3.88}$$

Từ (3.87) ta có $\psi_1 = \psi_2$, điều này có nghĩa là trạng thái của nó ở thời điểm t_1 tại điểm x_1 đã lan truyền đi và đến thời điểm t_2 thì nó đến x_2. Ta gọi sự lan truyền này là lan truyền sóng. Mặt khác, vế trái của (3.88) biểu thị quãng đường mà trạng thái của hệ được truyền đi từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2. Do đó, hệ số a chính là vận tốc lan truyền sóng, hay nói chính xác hơn là *vận tốc pha*. Đồng thời, vì $t_2 > t_1$ nên $x_2 > x_1$, nghĩa là $\psi(x - at)$ biểu thị sóng truyền theo chiều dương của trục x và ta gọi đây là sóng thuận. Tương tự $\varphi(x + at)$ biểu thị sóng truyền theo chiều âm của trục x và ta gọi là sóng nghịch.

Như vậy, nghiệm của phương trình (3.81) là kết quả của việc chồng chập sóng thuận và sóng nghịch với vận tốc pha bằng a.

Bước 2: Cho nghiệm tổng quát thỏa mãn các điều kiện ban đầu.

Cho phương trình (3.86) lần lượt thỏa mãn các điều kiện ban đầu (3.82) ta được:

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{3.89}$$

$$a\varphi'_t(x - at)\Big|_{t=0} - a\psi'_t(x + at)\Big|_{t=0} = F(x). \tag{3.90}$$

Lấy tích phân (3.90) từ 0 đến x ta được:

$$a[\varphi(x) - \varphi(0)] - a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x F(y)dy. \tag{3.91}$$

Đặt $B = \varphi(0) - \psi(0)$, ta được:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x F(y)dy + B. \tag{3.92}$$

Giải hệ phương trình (3.89) và (3.92) cho ta kết quả:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy + \frac{1}{2}B, \tag{3.93}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy - \frac{1}{2}B. \tag{3.94}$$

Thay (3.93) và (3.94) vào (3.86) ta được nghiệm của bài toán:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\ f(x-at) + f(x+at)\ \right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(y)dy \tag{3.95}$$

Biểu thức (3.95) được gọi là *công thức D'Alembert*, nó cho phép ta xác định độ lệch của điểm *x* trên sợi dây ở thời điểm *t*.

3.4. Sự lan truyền sóng hai chiều

3.4.1. Thiết lập phương trình

Xét dao động của một màng đàn hồi được căng trong mặt phẳng *Oxy* nằm ngang. Để đơn giản cho thiết lập phương trình dao động, chúng ta giới hạn theo các giả thiết sau [3, 6, 17]:

- *Màng có độ dày không đáng kể, có thể uốn tự do* (*không sinh ra lực chống uốn trong quá trình dao động*)

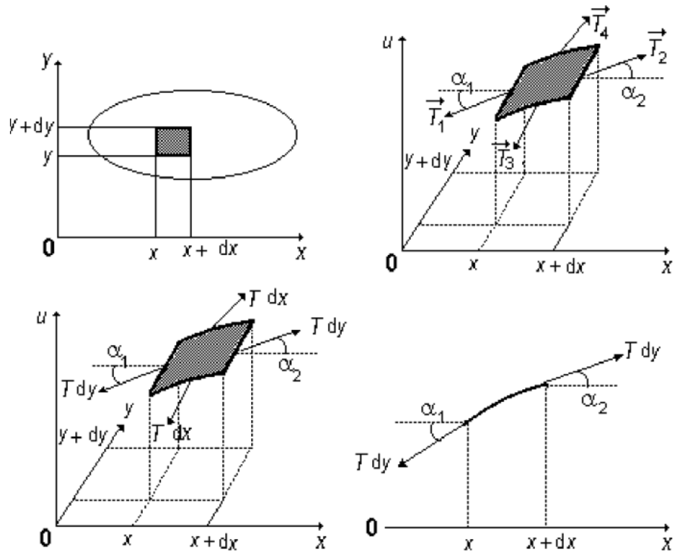
- *Phân bố khối lượng là đồng nhất theo bề mặt của màng* (*mật độ khối lượng mặt σ = cosntant);*

- *Biên của màng được giữ cố định. Độ lớn lực căng T trên mỗi đơn vị chiều dài của biên là như nhau trong suốt quá trình màng dao động;*

- *Ngoại lực tác dụng luôn vuông góc với mặt phẳng Oxy và có phân bố về cường độ trên một đơn vị diện tích là là P*(*x*,*y*,*t*)*;*

- *Độ lệch u(x, y, t) của màng tại điểm M(x,y) ở thời điểm t bất kì là rất bé và có phương luôn vuông góc với mặt phẳng Oxy.*

Ta tưởng tượng tách ra một phần tử vi phân diện tích bề mặt hình chữ nhật có các cạnh *dx* và *dy* như trên hình 3.4.



Hình 3.4. Mô hình dao động của màng trong mặt phẳng O*xy* và biểu diễn lực căng tác dụng lên phần tử bề mặt có diện tích *dxdy*.

Các lực căng tác dụng lên các cạnh của phần tử bề mặt là $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3, \vec{T}_4$. Với những giả thiết đã nêu, độ lớn của các lực căng được xác định:

$$T_1 = T_2 = Tdy;\ T_3 = T_4 = Tdx. \qquad (3.96)$$

Tương tự trường hợp sợi dây đàn hồi, theo định luật 2 Newton ta có phương trình động lực học cho phần tử bề mặt có diện tích *dxdy* theo phương dao động *u* là:

$$Tdy(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) + Tdx(\sin\beta_2 - \sin\beta_1) + P\,dxdy$$

$$= \sigma\, dxdy \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}. \qquad (3.97)$$

Do độ lệch u của màng là bé nên các góc lệch α_i , β_i rất bé (Hình 3.4). Khi đó, ta có các gần đúng:

$$\sin\alpha_i \approx \mathrm{tg}\alpha_i; \sin\beta_i \approx \mathrm{tg}\beta_i. \tag{3.98}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của đạo hàm ta có:

$$\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{\partial u(x+dx,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \tag{3.99}$$

$$\mathrm{tg}\beta_2 - \mathrm{tg}\beta_1 = \frac{\partial u(x,y+dy)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{3.100}$$

Thay các phương trình (3.98) ÷ (3.100) vào (3.97) ta được:

$$Tdy\left(\frac{\partial u(x+dx,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) + Tdx\left(\frac{\partial u(x,y+dy)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)$$

$$+P\,dxdy = \sigma dxdy\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}. \tag{3.101}$$

Chia hai vế của (3.101) cho $T\sigma\, dxdy$, sau đó chuyển qua giới hạn với dx và dy dần tới 0, ta được:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) + g(x,y,t) \tag{3.102}$$

trong đó:

$$a^2 = \frac{T}{\sigma} \quad \text{và} \quad g(x,y,t) = \frac{P(x,y,t)}{\sigma}. \tag{3.103}$$

Phương trình (3.102) được gọi là phương trình dao động của màng khi có ngoại lực tác dụng. Dạng của phương trình này được gọi là *phương trình truyền sóng hai chiều*. Khi không có ngoại lực tác dụng thì $P(x,y,t) \equiv 0$, lúc đó phương trình trên trở thành thuần nhất:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right). \tag{3.104}$$

Dạng của (3.104) được gọi là *phương trình truyền sóng thuần nhất hai chiều*.

3.4.2. Dao động tự do của màng chữ nhật

Xét dao động của một màng hình chữ nhật có độ dài các cạnh là *l* và *d* tương ứng được gắn chặt dọc theo các trục *x* và *y*. Gọi độ lệch và vận tốc ban đầu của điểm (*x*,*y*) tương ứng là *f*(*x*,*y*) và *F*(*x*,*y*). Giả thiết ngoại lực tác dụng lên màng là không đáng kể. Chuyển động của màng được mô tả theo phương trình thuần nhất (3.104) còn các điều kiện biên và điều kiện đầu có dạng:

$$u\,(x, y, 0) = f\,(x,y)\,, \tag{3.105}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x,y)\,, \tag{3.106}$$

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, d, t) = 0. \tag{3.107}$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp tách biến như bài toán truyền sóng một chiều.

Bước 1: *Tách biến để chuyển về các phương trình vi phân thường.*

Ta tìm nghiệm ở dạng $u(x,y,t) = V(x, y)T(t)$ và thay vào (3.104), ta được:

$$VT_{tt}'' = a^2(V_{xx}'' + V_{yy}'')T\,. \tag{3.108}$$

Chia hai vế của (3.108) cho a^2VT:

$$\frac{T_{tt}''}{a^2T} = \frac{1}{V}(V_{xx}'' + V_{yy}'') = -c^2\,. \tag{3.109}$$

Ở đây, ta đã đặt hai vế bằng hằng số - c^2 vì tương tự như lý luận với phương trình sóng một chiều, nếu hai vế của phương trình trên bằng hằng số không âm thì bài toán chỉ có nghiệm tầm thường $u(x, y, t) \equiv 0$. Với cách đặt trên, ta thu được phương trình vi phân thường cho $T(t)$:

$$T'' + \omega^2 T = 0 \ \ (\text{với } \omega = ac\,). \tag{3.110}$$

Tương tự, phương trình cho hàm phụ thuộc không gian $V(x, y)$ là:

$$V_{xx}'' + V_{yy}'' + c^2V = 0\,. \tag{3.111}$$

Biểu thức (3.11) được gọi là *phương trình Helmholtz hai chiều*.

Tiếp tục tách biến:

$$V(x, y) = X(x)Y(y), \tag{3.112}$$

lúc đó phương trình (3.111) được biến đổi thành:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' + c^2 Y}{Y} = -k^2. \tag{3.113}$$

Ở trên, ta đã đặt hai vế của (3.113) bằng $-k^2$ để bài toán có nghiệm không tầm thường (như đã chỉ ra ở bài toán truyền sóng một chiều). Khi đó (3.113) được chuyển thành hệ hai phương trình vi phân thường:

$$X'' + k^2 X = 0. \tag{3.114}$$

$$Y'' + p^2 Y = 0 \quad (\text{với } p^2 = c^2 - k^2 > 0). \tag{3.115}$$

Bước 2: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên.*

Nghiệm tổng quát của (3.114) và (3.115) có dạng:

$$X(x) = A\cos kx + B\sin kx, \tag{3.116}$$

$$Y(y) = C\cos py + D\sin py. \tag{3.117}$$

Vì $V = XY$ bằng không trên biên (gồm bốn đoạn $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = d$), nên:

$$X(0) = X(l) = Y(0) = Y(d) = 0. \tag{3.118}$$

Tương tự bài toán truyền sóng 1 chiều ta có:

$$A = C = 0,\ B\sin kl = 0,\ D\sin pd = 0. \tag{3.119}$$

Để có nghiệm không tầm thường ta cần phải lấy B và D khác không. Khi đó, (3.119) được thỏa mãn khi:

$$k = \frac{m\pi}{l} \quad (m = 1, 2, 3 \ldots), \tag{3.120}$$

$$p = \frac{n\pi}{d} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots). \tag{3.121}$$

Tương tự trường hợp truyền sóng một chiều, ta không cần lấy các giá trị âm của n, m trong (3.120) và (3.121). Hơn nữa, ta có thể chọn nghiệm riêng của $V(x, y)$ là (các hệ số sẽ được đưa vào phần nghiệm phụ thuộc thời gian $T(t)$):

$$V_{mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}\ (m, n = 1, 2, ...). \qquad (3.122)$$

Quay lại phương trình (3.110) và (3.115) ta thấy: $\omega = ac = a\sqrt{k^2 + p^2}$. Do đó, với mỗi $k = \frac{m\pi}{l}$ và $p = \frac{n\pi}{d}$ thì giá trị tương ứng của ω là:

$$\omega = \omega_{mn} = a\pi\sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{d^2}}, \quad m, n = 1, 2, ... \qquad (3.123)$$

Khi đó, nghiệm (3.110) cho $T(t)$ ứng với ω_{mn} là:

$$T_{mn}(t) = a_{mn}\cos\omega_{mn}t + b_{mn}\sin\omega_{mn}t. \qquad (1.124)$$

Vậy nghiệm của bài toán thỏa mãn điều kiện biên (3.49) là:

$$u_{mn}(x, y, t) = (a_{mn}\cos\omega_{mn}t + b_{mn}\sin\omega_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}. \qquad (3.125)$$

Các hàm u_{mn} được gọi là các *hàm riêng* ứng với *trị riêng* ω_{mn} của dao động.

Bước 3: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện đầu.*

Tương tự trường hợp truyền sóng một chiều, để thỏa mãn điều kiện đầu ta phải tìm nghiệm ở dạng chuỗi:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos\omega_{mn}t + b_{mn}\sin\omega_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}. \qquad (3.126)$$

Theo điều kiện ban đầu (3.105):

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d} = f(x, y). \qquad (3.127)$$

Để tìm hệ số a_{mn} ta nhân hai vế của (3.127) với $\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}$ rồi thực hiện lấy tích phân hai vế trên miền $\{0 \le x \le l,\ 0 \le y \le d\}$ đồng thời chú ý đến tính chất trực giao của các hàm lượng giác ta rút ra được (tương tự bài toán truyền sóng một chiều):

$$a_{mn} = \frac{4}{ld}\int_0^d dy\int_0^l f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}dx\,, \quad (m, n = 1, 2, ...) \quad (3.128)$$

Cuối cùng, ta xác định b_{mn} từ điều kiện đầu (3.106):

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\omega_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}\,. \qquad (3.129)$$

Dễ thấy $b_{mn}\omega_{mn}$ liên hệ với $F(x, y)$ trong (3.129) hoàn toàn tương tự liên hệ giữa a_{mn} với $f(x, t)$ trong (3.127). Vì vậy, sử dụng kết quả (3.128) ta rút ra được:

$$b_{mn} = \frac{4}{ld\omega_{mn}}\int_0^d dy\int_0^l F(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}dx, \, (m, n = 1, 2, ...)\,. \quad (3.130)$$

Vậy nghiệm của bài toán là (3.126) với các hệ số a_{mn} và b_{mn} tương ứng được tính theo (3.128) và (3.130)

Chú ý:

Khác với bài toán truyền sóng một chiều, ở đây tuỳ thuộc vào các giá trị của l và d mà có thể có nhiều hàm V_{mn} cùng ứng với một trị riêng ω_{mn}. Do đó có thể có nhiều dao động riêng u_{mn} ứng với cùng một tần số ω_{mn} (ta gọi là sự *suy biến*). Chẳng hạn, xét màng vuông với $l = d = 1$. Khi đó:

$$\omega_{mn} = a\pi\sqrt{\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{d^2}} = a\pi\sqrt{m^2+n^2} = \omega_{nm}\,.$$

Mặc dù trong trường hợp này có $\omega_{mn} = \omega_{nm}$ nhưng theo (3.122) thì:

$$V_{mn} = \sin m\pi x . \sin n\pi y \neq V_{nm} = \sin n\pi x . \sin m\pi y.$$

Ý nghĩa vật lí

Do tần số ω_{mn} phụ thuộc vào mật độ khối lượng σ (xem (3.123)) và sức căng T nên các màng có mật độ khối lượng khác nhau sẽ có độ cao âm khác nhau (với cùng sức căng). Chúng ta có thể thay đổi độ cao âm của màng bằng cách thay đổi độ căng.

Bằng lập luận tương tự trường hợp dao động của sợi dây, đối với màng ta có thể tìm được các *đường nút* của dao động riêng u_{mn} khi viết lại nó dưới dạng:

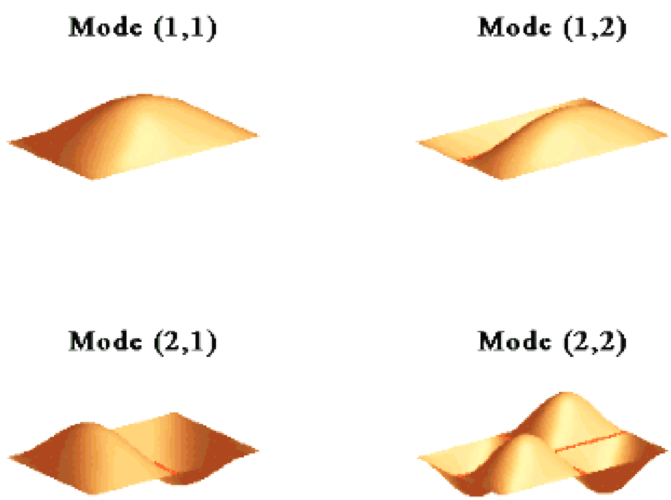
$$u_{mn}(x,y,t)=\left[Q_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{m\pi y}{d}\right]\sin\left(\omega_{mn}t+\varphi_{mn}\right), \tag{3.131}$$

$$Q_{mn}=\sqrt{a_{mn}^2+b_{mn}^2},\ tg\varphi_{mn}=\frac{a_{mn}}{b_{mn}}. \tag{3.132}$$

Biểu thức trong ngoặc vuông (3.131) là *biên độ* của dao động riêng, các đường nút được xác định từ phương trình (theo điều kiện triệt tiêu của biên độ):

$$\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{m\pi y}{d}=0,\ (m,\ n=1,\ 2,\ ...). \tag{3.133}$$

Một số mode dao động đầu tiên của màng chữ nhật được minh họa như trên hình 3.5.



Hình 3.5. Một số mode dao động đầu tiên của màng chữ nhật.

3.4.3. Dao động tự do của màng tròn

Xét một màng hình tròn có bán kính *d*, tâm ở gốc tọa độ, được căng ngang trong mặt phăng O*xy* và có biên được gắn chặt. Độ lệch của các điểm trên màng thỏa mãn phương trình sóng hai chiều (3.104). Để tiện lợi cho việc tìm phương trình mô tả dao động chúng ta sử dụng hệ tọa độ cực (r, θ). Lúc đó, toán tử Laplace trong tọa độ cầu theo (2.120) ở chương 2 được chuyển về trong tọa độ cực bằng cách bỏ số hạng của có đạo hàm theo ϕ. Với cách lựa chọn này, phương trình sóng (3.104) được đưa về:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta}\right). \tag{3.134}$$

Do tính chất đối xứng của màng tròn nên ta chỉ cần xét trường hợp độ dịch chuyển u không phụ thuộc vào θ, tức là $u = u(r, t)$. Lúc đó, phương trình (3.134) trở thành:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{3.135}$$

Vì biên được gắn chặt nên:

$$u(d, t) = 0\ ,\ t \geq 0. \tag{3.136}$$

Để chuyển dịch u không phụ thuộc vào θ, điều kiện ban đầu phải không phụ thuộc θ:

$$u(r, 0) = f(r), \tag{3.137}$$

$$\left.\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 = F(r). \tag{3.138}$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp tách biến theo 3 bước sau:

Bước 1: *Tách biến để đưa về hệ các phương trình vi phân thường.*

Đặt $u(r, t) = R(r)T(t)$ rồi thay vào (3.135) ta được:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right). \tag{3.139}$$

Vế phải của (3.139) là hàm chỉ phụ thuộc *r* còn vế trái chỉ phụ thuộc *t* nên biểu thức trên chỉ thỏa mãn khi chúng đều bằng hằng hằng số -c^2. Khi đó phương trình (3.139) chuyển thành hai phương trình vi phân thường:

$$T'' + \omega^2 T = 0, \quad (\omega = ac), \tag{3.140}$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' + c^2 R = 0. \tag{3.141}$$

Bằng cách đổi biến:

$$s = cr, \tag{3.142}$$

lúc đó phương trình (3.141) được viết thành:

$$\frac{d^2R}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dW}{ds} + W = 0, \tag{3.143}$$

đây chính là *phương trình Bessel* với $\nu = 0$ (xem thêm các tài liệu [3] hoặc [6]).

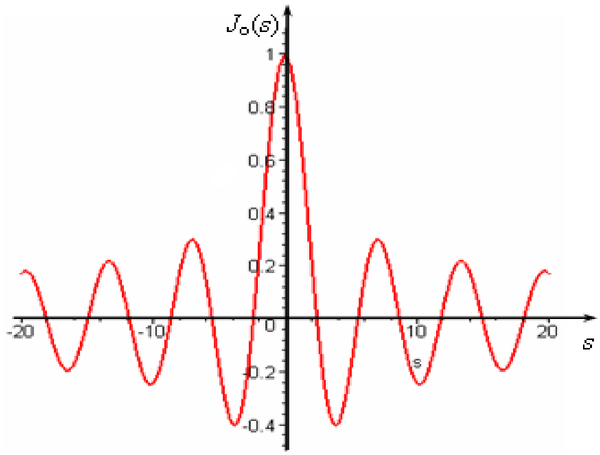
Bước 2: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên.*

Do phương trình Bessel (3.143) có hai nghiệm độc lập tuyến tính là hàm *Bessel loại một* J_o và *hàm Bessel loại hai* N_o. Nhưng do hàm N_o không hữu hạn tại tại $s = 0$ nên nó không phải là nghiệm của bài toán [3, 5]. Khi đó, đặt $R(r) = J_o(cr)$ và cho thỏa mãn điều kiện biên (3.136) ta có:

$$J_o(cd) = 0.$$

Vì vậy, cd phải có giá trị bằng các *không điểm* α_m của J_o. Suy ra:

$$c = c_m = \frac{\alpha_m}{d}. \tag{3.144}$$



Hình 3.6. Đồ thị và các không điểm của hàm Bessel J_o.

Chú ý: Các không điểm α_m có khoảng cách không đều nhau như trên hình 3.6 và thường được tính sẵn dưới dạng bảng (ví dụ: α_1 = 2,408; α_2 = 5,5201; α_3 = 8,6537...). Hình 3.6 là đồ thị hàm J_o ứng với một vài giá trị đầu tiên của không điểm.

Do đó các hàm $R_m(r) = J_o(c_m r) = J_o(\frac{\alpha_m}{d} r)$ với m = 1,2, ... là các nghiệm của (3.143) và thỏa mãn điều kiện biên (3.136). Tương ứng với c_m và R_m là $\omega = \omega_m = ac_m$ và nghiệm tổng quát của (3.140) là:

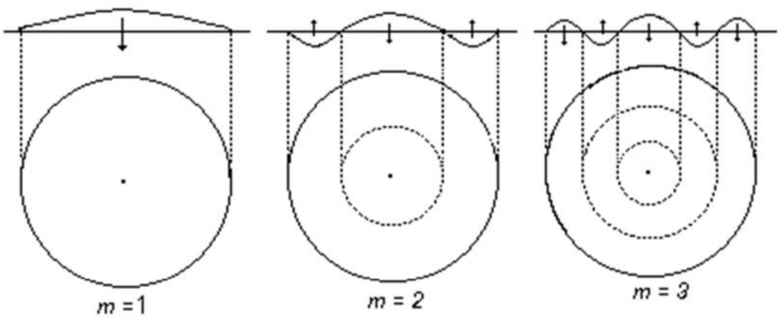
$$T_m(t) = a_m \cos\omega_m t + b_m \sin\omega_m t, \tag{3.145}$$

với

$$\omega_m = \frac{a\alpha_m}{d} \quad (m = 1,2,3\dots) \tag{3.146}$$

Vậy, nghiệm riêng của (3.139) thỏa mãn điều kiện biên (3.136) là:

$$u_m(r, t) = R_m(r)\, T_m(t) = (a_m \cos\omega_m t + b_m \sin\omega_m t)\, J_o(k_m r). \tag{3.147}$$



Hình 3.7. Dạng của một số mode đầu tiên ứng với m = 1, m = 2, m = 3.

Các hàm u_m được gọi là hàm riêng của màng tròn ứng với trị riêng ω_m. Dao động u_m ứng với tần số ω_m được gọi là *mode thứ m*. Dạng của một số mode đầu tiên được mô tả như trên hình 3.7.

Với m =1, thì u_1 không có đường nút, tức là với mọi điểm trên màng thuộc mode dao động này sẽ cùng dịch lên trên hoặc cùng dịch xuống dưới.

Với m =2, thì có một đường nút ứng với $r = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} d$. Dao động riêng u_2 có dạng là tại một thời điểm thời điểm nào đó, toàn bộ các điểm bên trong đường nút dịch chuyển lên phía trên và phần còn lại ở bên ngoài thì dịch xuống hoặc ngược lại.

Tổng quát, hàm riêng $u_m(r, t)$ có m - 1 nút.

Bước 3: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện đầu.*

Tương tự các bài toán truyền sóng trước đây, ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng chuỗi:

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos\omega_m t + b_m \sin\omega_m t) J_o(\frac{\alpha_m}{d} r). \quad (3.148)$$

Cho (3.148) thỏa mãn điều kiện ban đầu (3.137) ta được:

$$u(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \; J_o(\frac{\alpha_m}{d} r) = f(r). \quad (3.149)$$

Do các hàm Bessel $J_o(\frac{\alpha_m}{d}r)$ trực giao với nhau (xem thêm ở các tài liệu [3, 6]) nên nhân hai vế của (3.149) với $J_o(\frac{\alpha_n}{d}r)$ rồi lấy tích phân theo r trên miền [0, d] ta thu được:

$$a_m = \frac{2}{d^2 J_1^2(\alpha_m)}\int_0^d r\, f(r) J_o(\frac{\alpha_m}{d}r)\,dr\,, \quad (m = 1, 2, ...)\,. \qquad (3.150)$$

Tương tự, để (3.148) thỏa mãn điều kiện đầu (3.138) ta suy ra:

$$b_m = \frac{2}{c\alpha_m d J_1^2(\alpha_m)}\int_0^d rF(r) J_o(\frac{\alpha_m}{d}r)\,dr\,, \quad (m = 1, 2, ...)\,. \qquad (3.151)$$

Chú ý: Thông thường, để tính các hệ số a_m , b_m ta phải tính các tích phân bằng phương pháp số (ví dụ xem chương 6) kết hợp sử dụng bảng giá trị của hàm *Bessel* J_o *và* J_1.

3.5. Phương trình truyền nhiệt

3.5.1.Thành lập phương trình truyền nhiệt

Thực nghiệm đã cho thấy rằng, sự truyền nhiệt trong một vật đẳng hướng luôn theo hướng từ nơi nhiệt độ cao tới nơi có nhiệt độ thấp hơn. Gọi $u(x,y,z,t)$ là nhiệt độ của điểm (x, y, z) tại thời điểm t thì dòng nhiệt sẽ có phương trùng với gradient của hàm nhiệt độ và có chiều ngược lại. Nghĩa là, tốc độ dòng nhiệt $\vec{J}$ tỉ lệ với -grad$u(x,y,z,t)$ và được xác định:

$$\vec{J} = -K\mathrm{grad}u\,, \qquad (3.152)$$

ở đây K là hệ số tỷ lệ và được gọi là *hệ số dẫn nhiệt trong* của vật thể.

Gọi V là miền bất kỳ có mặt biên S nằm trong vật thể. Ta thấy tổng nhiệt lượng rời khỏi miền V truyền qua mặt S trong một đơn vị thời gian là:

$$Q_1' = \iint_S \vec{J}.d\vec{S} = -K\iint_S \mathrm{grad}\,u.d\vec{S}\,. \qquad (3.153)$$

Mặt khác, theo định lí Ostrogradski- Gauss (xem chương 2) biểu thức trên được đưa về dạng:

$$Q_1^{'} = -K\iint_S \text{grad}u.d\vec{S} = -K\iiint_V \text{div}(\text{grad}u)dV = -K\iiint_V \Delta u dV\,, \quad (3.154)$$

với Δ là toán tử Laplace.

Giả sử trong vật có nguồn nhiệt với mật độ $F(x,y,z,t)$, nghĩa là nhiệt lượng sinh ra (hoặc mất đi) trong một đơn vị thể tích trong một đơn vị thời gian (ở thời điểm t). Với cách gọi này thì ta quy ước: nếu nguồn sinh nhiệt thì $F(x,y,z,t) > 0$, còn nếu nguồn nhiệt tiêu thụ nhiệt thì $F(x,y,z,t) < 0$. Khi đó, trong một đơn vị thời gian, lượng nhiệt Q_2 do nguồn nhiệt sinh ra trong miền V là:

$$Q_2 = \iiint_V F(x,y,z,t)dV\,. \qquad (3.155)$$

Mặt khác, độ biến thiên nhiệt lượng trong miền V trong một đơn vị thời gian sẽ là:

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{(V)} \rho C \frac{\partial u}{\partial t} dV\,, \qquad (3.156)$$

ở đây, ρ và C tương ứng là khối lượng riêng và nhiệt dung riêng của vật. Theo định luật bảo toàn năng lượng, độ biến thiên nhiệt lượng trong một đơn vị thời gian $\frac{dQ}{dt}$ phải bằng nhiệt lượng do nguồn nhiệt sinh ra trừ đi nhiệt lượng truyền qua diện tích S trong một đơn vị thời gian. Nghĩa là

$$\frac{dQ}{dt} = Q_2 - Q_1^{'}. \qquad (3.157)$$

Thay (3.155) và (3.156) vào (3.157) ta được:

$$\iiint_{(V)} \left[-\rho C \frac{\partial u}{\partial t} + K\Delta u + F(x,y,z,t) \right] dV = 0\,. \qquad (3.158)$$

Vì (3.158) đúng với miền V bất kỳ bên trong vật thể, nên hàm dưới dấu tích phân phải bằng 0 ở khắp nơi trong trong toàn miền khảo sát, tức là:

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(x,y,z,t) + g(x,y,z,t)\,, \tag{3.159}$$

trong đó,

$$a^2 = \frac{K}{\rho C}\,, \tag{3.160}$$

gọi là *hệ số khuyếch tán nhiệt* của vật, còn $g(x, y, z, t)$ là hàm liên hệ với nguồn nhiệt theo biểu thức:

$$g(x,y,z,t) = \frac{F(x,y,z,t)}{\rho C}\,. \tag{3.161}$$

Phương trình (3.159) được gọi là *phương trình truyền nhiệt không thuần nhất* trong không gian ba chiều. Nếu trong vật không có nguồn nhiệt thì phương trình trên trở thành phương trình thuần nhất ba chiều:

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(x,y,z,t). \tag{3.162}$$

Trong trường hợp sự truyền nhiệt thuần nhất chỉ xảy ra theo một phương trong không gian (ví dụ theo phương x) thì (3.159) trở thành *phương trình truyền nhiệt một chiều* có dạng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)\,. \tag{3.163}$$

Trong các mục tiếp theo, chúng ta chỉ giới hạn khảo sát bài toán truyền nhiệt một chiều (các trường hợp 2 chiều hoặc 3 chiều ta cũng có thể nghiên cứu hoàn toàn tương tự).

3.5.2. Điều kiện ban đầu và điều kiện biên

Do phương trình truyền nhiệt là phương trình đạo hàm riêng cấp một theo biến thời thời gian, nên bài toán truyền nhiệt chỉ cần một điều kiện đầu. Nếu bài toán truyền nhiệt diễn ra trong không gian hữu hạn thì ta cần có cả điều kiện đầu và các điều kiện biên.

- *Điều kiện ban đầu*: cho biết sự phân bố nhiệt độ theo không gian tại thời điểm ban đầu

$$u(x,0) = f(x). \tag{3.164}$$

- *Điều kiện biên*: giả sử tại các mút $x = 0$ và $x = l$ có sự trao đổi nhiệt với môi trường bên ngoài. Gọi h là *hệ số truyền nhiệt ngoài* thì nhiệt lượng truyền qua một đơn vị diện tích mặt trong một đơn vị thời gian tại các đầu mút tương ứng là:

$$h_1\left[u(0,t)-U_1\right]; \quad h_2\left[u(l,t)-U_2\right], \tag{3.165}$$

trong đó U_1 và U_2 là nhiệt độ của môi trường tại các mút $x = 0$ và $x = l$ tương ứng. Nhiệt lượng này phải bằng dòng nhiệt đi qua một qua một đơn vị diện tích mặt tiếp xúc trong một đơn vị thời gian tương ứng, nghĩa là $-K\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Tại $x = 0$, pháp tuyến hướng theo chiều âm của trục x nên $\dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Tương tự, tại mút $x = l$ thì $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Vậy ta có các điều kiện biên là:

$$h_1\left[u(0,t)-U_1)\right] = K\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}; \quad h_2\left[u(l,t)-U_2)\right] = -K\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}. \tag{3.166}$$

Nếu tại các mút của thanh là cách nhiệt thì hệ số truyền nhiệt ngoài h bằng không, khi đó điều kiện biên (3.166) trở thành:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{3.167}$$

Nếu tại các mút của thanh luôn được giữ ở nhiệt độ bằng nhiệt độ của môi trường, lúc đó theo nguyên lí thứ hai của nhiệt động lực học thì không có dòng nhiệt truyền nhiệt qua hai mút ($u'_x = 0$). Vì vậy điều kiện (3.166) lúc này trở thành:

$$u(0, t) = U_1;\ u(l, t) = U_2\,. \tag{3.168}$$

3.6. Các trường hợp truyền nhiệt một chiều

3.6.1. Thanh hữu hạn, không có nguồn nhiệt, có nhiệt độ hai mút bằng không

Xét sự truyền nhiệt trong thanh thẳng chiều dài l đặt dọc theo trục x, có các mặt xung quanh được cách nhiệt với môi trường. Khi đó sự truyền nhiệt chỉ xảy ra theo chiều x. Giả thiết thanh không có nguồn nhiệt và nhiệt độ hai đầu mút luôn được giữ ở nhiệt độ không. Khi đó, sự phân bố nhiệt độ của thanh chính là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.169}$$

thỏa mãn các điều kiện biên:

$$u(0, t) = 0\,,\ \ u(l, t) = 0 \ \text{ với } t \geq 0 \tag{3.170}$$

và thỏa mãn điều kiện đầu:

$$u(x, 0) = f(x)\,,\ 0 \leq x \leq l. \tag{3.171}$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp tách biến giống như đối với trường hợp phương trình sóng một chiều.

Bước 1: *Tách biến để chuyển về các phương trình vi phân thường.*

Ta tìm nghiệm của bài toán dạng $u(x, t) = X(x)T(t)$, thay vào phương trình (3.169) và sau đó chia cả hai vế cho $a^2X\,T$, ta được:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T} = -p^2\,. \tag{3.172}$$

Ở đây, ta đã đặt hai vế của phương trình bằng hằng số âm để đảm bảo bài toán có nghiệm không tầm thường. Từ đó, (3.172) được đưa về thành hai phương trình vi phân thường:

$$X'' + p^2X = 0 \tag{3.173}$$

$$T' + a^2p^2T = 0. \tag{3.174}$$

Bước 2: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên.*

Tương tự bài toán truyền sóng, điều kiện (3.170) suy ra:

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \quad (3.175)$$

Nghĩa là nghiệm của phần phụ thuộc không gian trong bài toán truyền nhiệt hoàn toàn trùng về mặt hình thức với bài toán truyền sóng. Lúc đó, nghiệm riêng của (3.173) thỏa mãn điều kiện biên (3.175) là:

$$X(x)= \sin\frac{n\pi}{l}x; \quad \frac{n\pi}{l} = p \qquad (n =1, 2, 3, ...). \quad (3.176)$$

Với p thu được như trong (3.176) ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát của (3.174):

$$T(t) = a_n[exp(-\omega_n^2 t)]; \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l}. \quad (3.177)$$

Vì vậy, nghiệm riêng của phương trình (3.169) thỏa mãn điều kiện biên (3.170) là:

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\exp\left(-\omega_n^2 t\right), \quad n=1,2,... \quad (3.178)$$

Bước 3: *Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu.*

Tương tự bài toán truyền sóng một chiều, ta tìm nghiệm của bài toán truyền nhiệt dưới dạng tổng vô hạn:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\exp(-\omega_n^2 t). \quad (3.179)$$

Cho (3.179) thỏa mãn điều kiện đầu (3.171) ta được:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x). \quad (3.180)$$

Tương tự như trường hợp tính hệ số a_n của bài toán lan truyền sóng, từ (3.180) ta có:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_o^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,2,... \quad (3.181)$$

Nhận xét:

Từ (3.179) ta thấy: nếu nhiệt độ ở hai mút luôn được giữ bằng 0, thì sau khoảng thời gian đủ lớn, nhiệt độ tại mọi điểm trên thanh đều bằng 0. Điều này ta cũng dễ đoán nhận được dựa vào nguyên lí thứ hai của nhiệt động lực học khi điều kiện ổn định đã được thiết lập.

Nếu thay điều kiện biên ở trên bởi điều kiện: tại hai mút luôn được giữ ở các nhiệt độ không đổi U_1 , U_2 nào đó thì về mặt vật lí sẽ có hai quá trình xảy ra: *quá trình quá độ* và *quá trình ổn định*. Lúc đó, dựa vào tính chất tuyến tính của phương trình truyền nhiệt, ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tổng của hai hàm:

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t), \tag{3.182}$$

trong đó, $v(x)$ chỉ phụ thuộc vào x và được gọi là *nghiệm ổn định*, $w(x,t)$ được gọi là *nghiệm quá độ* và triệt tiêu khi t rất lớn, tức là khi đã thiết lập sự truyền nhiệt ổn định.

3.6.2. Thanh hữu hạn, không có nguồn nhiệt, hai mút được cách nhiệt

Xét sự truyền nhiệt một chiều trong thanh hữu hạn, không có nguồn nhiệt, hai mút được cách nhiệt (không có dòng nhiệt truyền qua). Khi đó, phân bố nhiệt trên thanh thỏa mãn phương trình (3.169) với các điều kiện biên:

$$u_x(0, t) = 0 \,,\ \ u_x(l, t) = 0 \ \text{ với } t \geq 0 \tag{3.183}$$

và các điều kiện đầu:

$$u(x, 0) = f(x) \,,\ 0 \leq x \leq l. \tag{3.184}$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp tách biến.

Bước 1: *Tách biến để chuyển về các phương trình vi phân thường.*

Thực hiện tương như trường hợp *thanh hữu hạn, không có nguồn nhiệt, có nhiệt độ hai mút bằng không* (mục 3.6.1) ta tách phương trình truyền nhiệt thành

$$X'' + p^2X = 0 \tag{3.185}$$

$$T' + a^2p^2T = 0. \tag{3.186}$$

Bước 2: *Tìm nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên.*

Từ (3.183), các điều kiện biên được viết thành:

$$u_x(0, t) = X_x(0)\, T(t) = 0\,,\ \ u_x(l, t) = X_x(l)\, T(t) = 0. \qquad (3.187)$$

Để nghiệm $u(x,t) = X(x)T(t)$ không tầm thường cần phải có:

$$X_x(0) = 0,\ \ X_x(l) = 0. \qquad (3.188)$$

Mặt khác, nghiệm của (3.185) được xác định bởi:

$$X(x) = A\cos px + B\sin px \qquad (3.189)$$

ta được

$$X_x(0) = pB = 0, \qquad (3.190)$$

$$X_x(l) = -pA\sin pl = 0. \qquad (3.191)$$

Từ (3.190) và (3.191) suy ra:

$$B = 0;\ p = p_n = \frac{n\pi}{l},\ n = 0, 1, ... \qquad (3.192)$$

ở đây, ta không cần lấy các giá trị âm của n. Vậy nghiệm của (3.185) thỏa mãn điều kiện biên (3.184) là:

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi}{l}x \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \qquad (3.193)$$

cần chú ý rằng giá trị $n = 0$, không phải là nghiệm tầm thường.

Vì $T(t)$ được xác định từ (3.186) hoàn toàn giống (3.174) nên hoàn toàn tương tự ta có nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện biên của bài toán là:

$$u_n(x,t) = a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\exp\left(-\omega_n^2 t\right);\ \omega_n = \frac{n\pi a}{l} \quad (n = 0\,, 1, 2, ...). \ (3.194)$$

Chú ý: Nghiệm ứng với $n = 0$ ($\omega_0 = 0$) cũng là trị riêng của bài toán đang xét.

Bước 3: *Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu.*

Lập luận hoàn toàn tương tự như mục 3.6.1, nghiệm cần tìm được biểu diễn dưới dạng tổng vô hạn:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\exp(-\omega_n^2 t)\,. \qquad (3.195)$$

Cho (3.195) thỏa mãn điều kiện đầu (3.184) ta được:

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=f(x)\,. \qquad (3.196)$$

Từ đây ta tính được hệ số a_n theo (3.181) nhưng chú ý n lấy từ 0. Kết quả thu được:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_o^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_o^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=1,2,\ldots \qquad (3.197)$$

Vậy nghiệm của bài toán cần tìm là (3.195) với các hệ số được tính theo tích phân (3.197).

3.6.3. Truyền nhiệt trong thanh hữu hạn có nguồn nhiệt

Đối với bài toán truyền nhiệt một chiều trong thanh hữu hạn có nguồn nhiệt thì sự phân bố nhiệt độ của hệ thỏa mãn phương trình không thuần nhất (3.163). Xét hai trường hợp sau đây: *nguồn nhiệt không thay đổi theo thời gian* và *nguồn nhiệt thay đổi theo thời gian*.

a) Trường hợp nguồn nhiệt không đổi theo thời gian

Giả sử nguồn nhiệt xuất hiện vào thời điểm ban đầu $t_o = 0$, đồng thời tại hai mút $x = 0$ và $x = l$ của thanh được giữ ở các nhiệt độ U_1 và U_2 không đổi. Khi đó, về mặt vật lí thì sự truyền nhiệt có thể được chia làm hai giai đoạn: *giai đoạn quá độ* và *giai đoạn ổn định dòng nhiệt*. Từ đấy, nghiệm của bài toán có thể tìm được dưới dạng tổng của hai thành phần: *nghiệm quá độ* $w(x,t)$ và *nghiệm dừng* $v(x)$:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x), \qquad (3.198)$$

ở đây, $w(x,t)$ và đạo hàm của nó dần đến 0 khi $t\to +\infty$. Thay vào (3.163) ta được:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2v''(x)+a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(x)\,,\ 0\le x\le l\,,\ t\ge 0 \qquad (3.199)$$

$$v(0)+w(0,t)=U_1\,,\ v(l)+w(l,t)=U_2 \qquad (3.200)$$

$$v(x) + w(x, 0) = f(x)\ ,\ 0 < x < l. \qquad (3.201)$$

Cho $t \to +\infty$ từ ba phương trình trên ta được bài toán biên cho phương trình vi phân thường để xác định nghiệm duy trì $v(x)$:

$$v''(x) = -\frac{1}{a^2} g(x)\ , \quad v(0) = U_1\ , \quad v(l) = U_2\ . \qquad (3.202)$$

Cầu phương hai lần phương trình này đồng thời sử dụng các điều kiện biên của $v(x)$ ta được nghiệm:

$$v(x) = \left[U_2 - U_1 + \int_0^l \left(\int_0^z \frac{g(s)}{a^2} ds \right) dz \right] \frac{x}{l} + U_1 - \int_0^x \left(\int_0^z \frac{g(s)}{a^2} ds \right) dz\ . \quad (3.203)$$

Thay $v(x)$ vào bài toán điều kiện biên và điều kiện đầu (3.199)÷(3.201) ta được phương trình cho $w(x,t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,\ w(0,t) = w(l,t) = 0\ ,\ w(x, 0) = f(x) - v(x). \quad (3.204)$$

Đây chính là bài toán thuần nhất đã giải và ta đã biết nghiệm có dạng (3.179) với a_n được tính theo (3.181), tức là:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \exp(-\omega_n^2 t); \quad \omega_n = \frac{n\pi\, a}{l}\ , \qquad (3.205)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_o^L [\,f(x) - v(x)] \sin\frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, ... \qquad (3.206)$$

Vậy, nghiệm cần tìm là :

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t).$$

b) Trường hợp nguồn nhiệt thay đổi theo thời gian

Để đơn giản ta chỉ xét trường hợp nguồn nhiệt phụ thuộc vào thời gian nhưng nhiệt độ ở hai mút luôn được giữ bằng không. Khi đó, để tìm sự phân bố nhiệt độ trong thanh ta tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất (3.163) với các điều kiện biên:

$$u(0, t) = 0\ ,\ u(l, t) = 0\ \ ,\ t \geq 0 \qquad (3.207)$$

và điều kiện đầu:

$$u(x, 0) = f(x),\ 0 \le x \le\ l. \quad (3.208)$$

Trước hết, ta tìm nghiệm của (3.163) dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (3.209)$$

Thực hiện các khai triển

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}; \quad g_n(x,t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (3.210)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{l}; \quad f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \quad (3.211)$$

Lúc đó $T_n(t)$ thỏa mãn phương trình vi phân thường:

$$T_n^{'} + \omega_n^2 T_n - f_n(t) = 0; \quad T_n(0) = f_n;\ \omega_n = \frac{n\pi\, a}{l}. \quad (3.212)$$

Giải phương trình này tìm các T_n sau đó thay vào (3.209) ta được nghiệm của bài toán.

3.6.4. Truyền nhiệt một chiều trong thanh dài vô hạn, không có nguồn nhiệt

Xét sự truyền nhiệt một chiều trong thanh dài vô hạn. Giả sử cần tìm nhiệt độ $u(x,t)$ tại điểm có toạ độ x của thanh rất dài không có nguồn nhiệt, nằm dọc theo trục Ox, tại thời điểm t. Ta có thể coi mô hình toán học là thanh dài vô hạn trên cả trục Ox, khi đó không còn điều kiện biên mà chỉ còn điều kiện đầu:

$$u(x, 0) = f(x),\ -\infty < x < +\infty. \quad (3.213)$$

Sự phân bố nhiệt độ trên thanh là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -\infty < x < +\infty. \quad (3.214)$$

Cũng giống như bài toán truyền nhiệt hữu hạn không có nguồn nhiệt, ở đây ta tìm nghiệm bằng phương pháp tách biến $u(x,t) = X(x)T(t)$. Nhưng cần lưu ý là không còn điều kiện biên nên phương pháp tách biến chỉ còn hai bước.

Bước 1: *Tách biến để dẫn đến các phương trình vi phân thường.*

Đặt $u(x,t) = X(x)T(t)$, thay vào (3.214) và lập luận như trước đây ta sẽ dẫn các phương trình cho X và T :

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{3.215}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{3.216}$$

Cần chú ý rằng, nếu $\lambda = - p^2 < 0$ thì (3.216) sẽ cho nghiệm tiến tới vô cùng khi $t \to +\infty$. Vì vậy, ta cần giả thiết $\lambda = p^2 \geq 0$. Lúc đó, nghiệm của hai phương trình này là:

$$X(x) = A\cos px + B\sin px;\ T(t) = Ce^{-c^2p^2t}. \tag{3.217}$$

với A, B, C là các hằng số tuỳ ý.

Nghiệm của (3.214) là:

$$u(x,t,p) = [\, a(p)\cos px + b(p)\sin px]\exp(-a^2p^2t), \tag{3.218}$$

ở đây, $a(p) = AC$ và $b(p) = BC$ là các hằng số tuỳ ý.

Bước 2: *Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu.*

Chú ý rằng, với mỗi p, a và b nào đó thì $u(x,t,p)$ xác định theo (3.218) nói chung không thỏa mãn điều kiện đầu $u(x,0) = f(x)$ vì ở $t = 0$ thì (3.218) là hàm hình sin. Trong bài toán truyền nhiệt trong thanh có chiều dài hữu hạn, nghiệm được tìm dưới dạng chuỗi của các u_n. Tuy nhiên, ở đây do thanh dài vô hạn nên $p = \dfrac{n\pi}{l}$ sẽ biến thiên một cách liên tục. Vì vậy, việc lấy tổng vô hạn các $u(x,t,p)$ trong (3.218) sẽ dẫn đến lấy tích phân, nghĩa là ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t,p)dp = \int_0^\infty \big(a(p)\cos px + b(p)\sin px\big)e^{-a^2p^2t}dp. \tag{3.219}$$

Cho (3.219) thỏa mãn điều kiện đầu (3.213) ta được:

$$u(x,0) = \int_0^\infty \big(a(p)\cos px + b(p)\sin px\big)dp = f(x). \tag{3.220}$$

Biểu thức (3.220) cho thấy $a(p)$ và $b(p)$ là hệ số tích phân Fourier của hàm $f(x)$, tức là

$$a(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos p\xi\, d\xi; \quad b(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin p\xi\, d\xi. \quad (3.221)$$

Khi đó (3.219) được biến đổi lượng giác để đưa về dạng

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dp\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos(px-p\xi)e^{-a^2p^2t}d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty}\cos(px-p\xi)e^{-c^2p^2t}dp\,. \qquad (3.222)$$

Sử dụng công thức tích phân [6]:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-s^2}\cos 2bs ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}\,, \qquad (3.223)$$

ta được:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-a^2p^2t}\cos(px-p\xi)dp=\frac{\pi}{2a\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]. \qquad (3.224)$$

Thay (3.224) vào (3.222) ta có:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}\,t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi. \qquad (3.225)$$

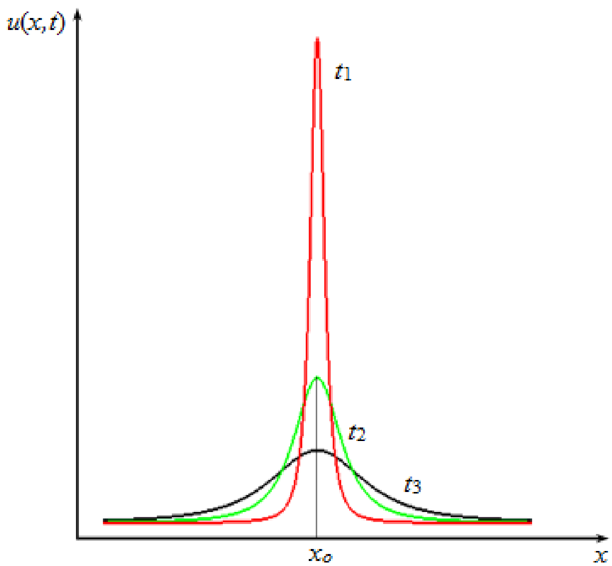
Bây giờ ta xét ý nghĩa vật lí của nghiệm (3.225). Giả sử điều kiện ban đầu của bài toán được cho bởi hàm delta Dirac: $f(x) = \delta(x - x_o)$. Thay vào (3.225) và dựa vào tính chất của hàm delta ta được:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\xi-x_0)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}\right]. \qquad (3.226)$$

Đồ thị của $u(x,t)$ được mô tả trên hình 3.8, ở các thời điểm $t_1 < t_2 < t_3$, với t_1 rất gần thời điểm ban đầu $t_o = 0$.

Ta thấy rằng, tại thời điểm ban đầu $t_o = 0$, phân bố nhiệt độ tập trung tại điểm x_o, còn nhiệt độ tại các điểm khác gần như bằng không. Khi thời gian tăng dần, nhiệt độ tại điểm x_o giảm dần còn nhiệt độ tại các miền lân cận x_o thì tăng dần. Quá trình này tiếp tục xảy ra trong toàn miền không gian khi thời gian tăng cho đến một lúc nào đó thì nhiệt độ tại mọi điểm là như nhau, quá trình truyền nhiệt đạt đến trạng thái dừng. Điều này hoàn toàn phù hợp với thực tế như các nguyên lí của nhiệt động lực học.



Hình 3.8. Hàm phân bố nhiệt độ ở các thời điểm khác nhau $t_1 < t_2 < t_3$.

Chú ý: Kết quả thu được trên đây có thể vận dụng cho trường hợp truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn (xem như nội dung bài tập).

3.7. Phương trình Poisson và phương trình Laplace

3.7.1. Phương trình Poisson và phương trình Laplace

Trong thực tế, khi nghiên cứu các hiện tượng vật lí ta vẫn gặp các *quá trình dừng*. Lúc đó, các số hạng trong phương trình mô tả hệ chỉ còn lại các thành phần phụ thuộc không gian. Mặt khác các hiện tượng vật lí thường được mô tả bởi các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai nên đối với các quá trình dừng thì phương trình mô tả nó trở thành phương trình đạo hàm riêng cấp hai theo biến không gian. Lúc đó, ta có thể đưa các phương trình đó về dạng sau:

$$\Delta u(\vec{r}\,) = g(\vec{r}\,), \tag{3.227}$$

trong đó, Δ là toán tử Laplace và (3.227) được gọi là *phương trình Poisson*. Khi vế phải của (3.227) đồng nhất bằng không thì phương trình Poisson trở thành *phương trình Laplace*:

$$\Delta u(\vec{r}\,) = 0. \tag{3.228}$$

Ta xét một vài ví dụ dẫn tới các phương trình này.

a) Hàm phân bố nhiệt độ $u(\vec{r}\,)$ trong không gian tuân theo phương trình không thuần nhất (3.161). Ở điều kiện dừng thì $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, khi đó phương trình truyền nhiệt (3.161) trở thành phương trình Poisson (3.227). Nếu thêm vào điều kiện trong vật không có nguồn nhiệt thì phương trình truyền nhiệt trở thành phương trình Laplace (3.228).

b) Theo lý thuyết điện từ Maxwell, phân bố điện thế φ của trường tĩnh điện trong miền không gian có điện tích thoả mãn Possion:

$$\Delta\varphi(\vec{r}\,) = \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{3.229}$$

với ρ là mật độ điện tích khối, ε là độ điện thẩm của môi trường. Trong miền không gian không chứa điện tích thì thế tĩnh điện thoả mãn phương trình Laplace:

$$\Delta\varphi(\vec{r}\,) = 0. \tag{3.230}$$

Nghiệm của phương trình Laplace có đạo hàm riêng cấp hai liên tục được gọi là *hàm điều hoà*.

3.7.2. Điều kiện biên của phương trình Poisson - Laplace

Tương tự như phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt, để bài toán được mô tả bằng phương trình Poisson – Laplace được đặt đúng đắn thì ta cần phải biết các điều kiện biên của chúng. Xét mấy loại điều kiện biên thường gặp sau:

a) Cho biết giá trị của hàm *u* trên biên *S* của miền khảo sát:

$$u\big|_S = f(\vec{r})\,. \tag{3.231}$$

Phương trình Poisson– Laplace với điều kiện biên (3.231) được gọi là *bài toán Dirichlet*.

b) Cho biết tốc độ thay đổi của của hàm *u* theo hướng pháp tuyến của mặt biên:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = F(\vec{r})\,. \tag{3.232}$$

Phương trình Poisson– Laplace với điều kiện biên (3.232) được gọi là *bài toán Neuman*.

c) Cho biết điều kiện biên có dạng:

$$\left(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S + hu\big|_S\right) = K(\vec{r})\,. \tag{3.233}$$

Phương trình Poisson– Laplace với điều kiện biên (3.233) được gọi là *bài toán hỗn hợp*.

Trong thực tế, chúng ta thường gặp các bài toán vật lí trong đó phương trình Poisson - Laplace áp dụng trong miền không gian có tính đối xứng nào đó. Khi đó, việc chọn hệ tọa độ thích hợp để thuận tiện cho việc tìm lời giải là cần thiết.

Trong chương này, ta chỉ yếu đề cập đến phương trình Laplace trong hệ tọa độ cầu với phương pháp tách biến như đã trình bày ở trên. Nghiệm hữu hạn và giới nội của phương trình Laplace được gọi là hàm cầu Laplace và đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết lượng tử [3, 6].

3.7.3. Hàm cầu

Xét phương trình Laplace (3.228) trong miền không gian có tính đối xứng cầu. Lúc đó, chọn hệ tọa độ cầu ($r,\theta,\ \phi$) thì phương trình Laplace được viết thành (xem chương 2):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0. \qquad (3.234)$$

Chúng ta cần tìm hàm $u(r,\theta,\phi)$ liên tục, đơn trị và thỏa mãn phương trình (3.234). Trong hệ tọa độ cầu, để đảm bảo tính đơn trị thì hàm $u(r,\theta,\phi)$ phải thỏa mãn điều kiện tuần hoàn có chu kỳ 2π đối với thành phần ϕ:

$$u(r,\theta,\phi) = u(r,\theta,\phi+2\pi),\ \text{với } r\geq 0,\ 0\leq\theta\leq\pi. \qquad (3.235)$$

Do tính chất tuần hoàn này nên ta có thể biểu diễn hàm u theo chuỗi Fourier [3, 16]:

$$u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{2}a_o(r,\theta)+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m(r,\theta)\cos m\phi+b_m(r,\theta)\sin m\phi\right]. \quad (3.236)$$

Thay (3.236) vào (3.234) ta được:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a_o}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial a_0}{\partial\theta}\right)\right]\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial a_n}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial a_n}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}a_n\right]\cos m\phi \qquad (3.237)\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial b_n}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial b_n}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}a_n\right]\sin m\phi=0\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra các hệ số a_m và b_m cũng thỏa mãn phương trình dạng:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}v=0. \qquad (3.238)$$

Trong đó, $v = v(r,\theta)$ và khi $m = 0$ ta có phương trình đối với a_o. Nghiệm của phương trình (3.238) được tìm bằng phương pháp tách biến:

$$v(r,\theta)= R(r)G(\theta). \qquad (3.239)$$

Thay (3.239) vào (3.238) và biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{G}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{dr}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}. \qquad (3.240)$$

Vế trái của phương trình (3.240) chỉ phụ thuộc r, còn vế phải chỉ phụ thuộc θ nên phương trình này chỉ thỏa mãn khi cả hai vế của nó bằng hằng số (ký hiệu là λ). Lúc đó, ta tách (3.240) thành hai phương trình sau:

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \qquad (3.241)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)G = 0. \qquad (3.242)$$

Để tìm nghiệm của (3.242) ta đưa vào biến số mới $x = \cos\theta$. Vì $0 \le \theta \le \pi$ nên $-1 \le x \le 1$, lúc đó $y = G(x)$ là một hàm của x được xác định trên miền [-1, 1]. Sử dụng tính chất đạo hàm của hàm hợp ta đưa (3.242) về dạng:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0. \qquad (3.243)$$

Phương trình (3.243) xác định trên miền [-1, 1] được gọi là *phương trình Legendre liên đới*. Bỏ qua phần trình bày chi tiết, các tính toán cho thấy λ bị ràng buộc bởi [3, 6]:

$$\lambda = n(n+1), \text{ với } n = 0, 1, 2,... \qquad (3.244)$$

Lúc đó, nghiệm của (3.243) sẽ là các đa thức Legendre liên đới $P_n^{(m)}(x)$:

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n, \quad (3.245)$$

với $m \le n$.

Bây giờ thay giá trị $\lambda = n(n+1)$ vào phương trình (3.241) và giải ra được hai nghiệm có dạng r^n và r^{-n-1}. Về mặt toán học, nghiệm tổng quát của (3.241) là tổ hợp của hai nghiệm này. Tuy nhiên, do nghiệm thứ hai không hữu hạn khi r tiến tới 0 nên trong vật lí ta thường chỉ giữ lại nghiệm thứ nhất. Lúc đó:

$$R_n(r) = r^n. \qquad (3.246)$$

Vì vậy, dạng của các hệ số chuỗi Fourier bây giờ là $v(r,\theta) = R_n(r)G_n(\theta)$. Ta đưa vào các hệ số mới $a_{m,n}$ và $b_{m,n}$ để các hệ số Fourier của chuỗi (3.236) được tính:

$$a_o(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{o,n} r^n P_n^{(0)}(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{o,n} r^n P_n(\cos\theta),$$

$$a_m(r,\theta) = \sum_{n=m}^{\infty} a_{m,n} r^n P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{3.247}$$

$$b_m(r,\theta) = \sum_{n=m}^{\infty} b_{m,n} r^n P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Tổng lấy từ m đến vô cùng vì $P_n^{(m)}(\cos\theta) = 0$ khi $m > n$. Thay các hệ số này vào (3.236) thì nghiệm của phương trình Laplace được viết:

$$u(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{o,n} r^n P_n(\cos\theta) +$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sum_{n=m}^{\infty} a_{m,n} r^n P_n^{(m)}(\cos\theta)\right]\cos m\phi + \left[\sum_{n=m}^{\infty} b_{m,n} r^n P_n^{(m)}(\cos\theta)\right]\sin m\phi\right\}$$

Thay đổi thứ tự lấy tổng trong số hạng thứ hai ta có:

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{o,n} r^n Y_n^{(0)}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left[a_{m,n} r^n Y_n^{(-m)}(\theta,\phi) + b_{m,n} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\phi)\right]\right\}, \tag{3.248}$$

trong đó, ta đưa vào ký hiệu

$$\begin{cases} Y_n^{(0)}(\theta) = \dfrac{1}{2} P_m(\cos\theta), \\ Y_n^{(-m)}(\theta,\phi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\phi, \\ Y_n^{(m)}(\theta,\phi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\phi. \end{cases} \tag{3.249}$$

được gọi là các *hàm cầu Legendre cấp n*.

Ứng với mỗi giá trị của n cho trước thì m nhận các giá trị 0, ±1, ±2,..., $\pm n$, nghĩa là có $2n+1$ hàm cầu Legendre. Các hàm cầu Legendre có chỉ số âm phía trên tương ứng với đa thức Legendre liên đới được nhân với $\cos m\phi$. Còn các hàm cầu Legendre có chỉ số trên dương thì đa thức Legendre liên đới được nhân với $\sin m\phi$.

Tổ hợp tuyến tính các hàm cầu Legendre được hàm cầu $Y_n(\theta, \phi)$:

$$Y_n(\theta,\phi) = a_{o,n} Y_n^{(0)}(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_{m,n} Y_n^{(-m)}(\theta,\phi) + b_{m,n} Y_n^{(m)}(\theta,\phi) \right]. \quad (3.250)$$

Các hàm $r^n Y_n(\theta,\phi)$, với n = 0, 1, 2, ... được gọi là các *hàm cầu Laplace* và là nghiệm của phương trình Laplace (3.228).

Vậy trong hệ tọa độ cầu, nghiệm giới nội của phương trình Laplace là:

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta,\phi). \quad (3.251)$$

3.7.4. Các tính chất của hàm cầu

a) Tính trực giao

Hàm cầu được dẫn ra trên đây có hai tính chất rất quan trọng là *tính trực giao* và *tính đầy đủ*. Trước hết, để khảo sát tính trực giao của hệ các hàm cầu ta cần chứng minh các hàm $Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\phi)$ và $Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\phi)$ trực giao với nhau trên mặt cầu S có bán kính ρ và có tâm tại gốc tọa độ O.

Thật vậy, xét yếu tố diện tích mặt dS (xem chương 2) nằm trên mặt cầu S. Khi đó:

$$\oiint_S Y_{n_1}^{(\pm m_1)}(\theta,\phi) Y_{n_2}^{(\pm m_2)}(\theta,\phi) dS = \oiint_S Y_{n_1}^{(\pm m_1)}(\theta,\phi) Y_{n_2}^{(\pm m_2)}(\theta,\phi) \rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \rho^2 \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos m_1\phi & \cos m_2\phi \\ \sin m_1\phi & \sin m_2\phi \end{Bmatrix} d\phi \int_0^{\pi} P_{n_1}^{(m_1)}(\cos\theta) P_{n_2}^{(m_2)}(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \quad (3.252)$$

Trong đó $\begin{Bmatrix} \cos m_1\phi & \cos m_2\phi \\ \sin m_1\phi & \sin m_2\phi \end{Bmatrix}$ là ký hiệu của một trong bốn tích sau:

$\cos m_1\phi \cos m_2\phi$; $\cos m_1\phi \sin m_2\phi$; $\sin m_1\phi \cos m_2\phi$; $\sin m_1\phi \sin m_2\phi$.

Do tính trực giao của hệ lượng giác nên tích phân trên sẽ bằng không khi $m_1 \neq m_2$.

Khi $m_1 = m_2 = m$ thì tích phân thứ nhất trong (3.252) sẽ có giá trị bằng:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi.d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi.d\varphi = \pi . \tag{3.253}$$

Lúc đó, tích phân (3.252) trở thành:

$$\pi\rho^2\int_0^{\pi}P_{n_1}^{(m)}(\cos\theta)P_{n_2}^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \pi\rho^2\int_{-1}^{1}P_{n_1}^{(m)}(x)P_{n_2}^{(m)}(x)dx \tag{3.254}$$

Vì các đa thức Legendre liên đới $P_n^{(m)}(x)$ trực giao với nhau trên [-1, 1] (xem thêm tài liệu [3]), nghĩa là

$$\int_{-1}^{1}P_{n_1}^{(m)}(x)P_{n_2}^{(m)}(x)dx = 0 \text{ khi } n_1 \neq n_2 \tag{3.255}$$

nên các hàm cầu $Y_n(\theta,\phi)$ lập thành một họ trực giao trên mặt cầu S nhận gốc tọa độ làm tâm. Nếu chọn S là mặt cầu có bán kính ρ =1 (mặt cầu đơn vị) thì ta có thể chứng minh được rằng:

$$\oiint_{(S)}Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi)Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)dS = \begin{cases} 0\ , & \text{khi } (m_1,n_1)\neq(m_2,n_2) \\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & \text{khi } n_1=n_2=n; m_1=m_2=m\neq 0 \\ 2\pi\dfrac{2}{n+1}, & \text{khi } n_1=n_2=n; m_1=m_2=m=0. \end{cases} \tag{3.256}$$

Sử dụng tính trực giao của hệ các hàm cầu $Y_n(\theta,\phi)$, các hệ số của chuỗi Fourier (3.250) được tính:

$$\begin{aligned} a_{o,n} &= \frac{2n+1}{4\pi}\frac{1}{\rho^n}\oiint_{(S)}f(\theta,\phi)Y_n^{(0)}(\theta,\phi)dS\ , \\ a_{m,n} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{1}{\rho^n}\oiint_{(S)}f(\theta,\phi)Y_n^{(-m)}(\theta,\phi)dS\ , \\ a_{m,n} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{1}{\rho^n}\oiint_{(S)}f(\theta,\phi)Y_n^{(m)}(\theta,\phi)dS\ . \end{aligned} \tag{3.257}$$

trong đó $f(\theta, \phi)$ là nghiệm của phương trình Laplace lấy tại giá trị biên của mặt cầu S, nghĩa là $f(\theta, \phi) = u(\rho, \theta, \phi)$.

b) Tính đầy đủ

Tính chất quan trọng thứ hai của hàm cầu là *tính đầy đủ*. Theo đó, nếu hàm số bất kỳ $g(\theta, \phi)$ khả vi, liên tục và có đạo hàm cấp hai thì nó có thể khai triển được theo chuỗi các hàm cầu nói trên:

$$g(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{o,n} Y_n^{(0)}(\theta,\phi)\rho^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} Y_n^{(-m)}(\theta,\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n} Y_n^{(m)}(\theta,\phi)\right]\rho^n \quad (3.258)$$

trong đó các hệ số của chuỗi được tính theo (3.257).

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Tìm các miền trên mặt phẳng mà các phương trình sau đây là elliptic, hyperbolic và parabolic:

a) $- x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2(y - 4)u_{yy} = 0$,

b) $u_{xx} + y^3 u_{yy} + 5u_x + 2u = 0$.

3.2. Giải bằng phương pháp tách biến đối với các bài toán biên:

a) $u_x = 4u_y$, biết $u(0, y) = 8e^{-3y}$.

b) $u_t = 2u_{xx}$, biết: $0 < x < 3,\ t > 0,\ u(0, t) = u(3, t) = 0$.

3.3. Xác định dao động tự do của một sợi dây hữu hạn, gắn chặt tại các mút $x = 0$, $x = l$. Biết độ lệch ban đầu bằng không và vận tốc ban đầu được cho bởi:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_o \cos(x-c) & \text{khi } |x-c| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{khi } |x-c| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

trong đó v_o là hằng số dương và $\frac{\pi}{2} < c < l - \frac{\pi}{2}$.

3.4. Xác định dao động của một dây gắn chặt ở mút $x = 0$,còn mút $x = l$ chuyển động theo quy luật $A\sin\omega t$. Biết rằng độ lệch và vận tốc ban đầu của sợi dây bằng không.

3.5. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$ thỏa mãn các điều kiện đầu bằng không và các điều kiện biên $u(0, t)= u(l, t)= 0$.

3.6. Một thanh đồng chất có độ dài $2l$ bị nén cho nên độ dài của nó còn lại là $2l(1 - \varepsilon)$. Lúc $t = 0$, người ta buông ra và lấy gốc hoành độ tại tâm của thanh. Chứng minh rằng độ lệch $u(x, t)$ của thiết diện có hoành độ x ở thời điểm t được cho bởi:

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

3.7. Vẽ dạng của sợi dây vô hạn dao động nếu vận tốc ban đầu bằng không, còn độ lệch ban đầu được cho bởi:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & khi \quad x \le 1 \\ x-1 & khi \quad 1 < x \le 2 \\ x-3 & khi \quad 2 < x \le 3 \\ 0 & khi \quad x > 3 \end{cases}$$

tại các thời điểm $t_o = 0$; $t_1 = 0.5$; $t_3= 1$; $t_3 = 2.5$ (s).

Xét dao động tại các điểm $x = 0$; $x = 2$; $x = 1$; $x = - 1$ (khi nào bắt đầu dao động, khi nào kết thúc), biết vận tốc truyền sóng $a = 2$.

3.8. Giải bài toán dây rung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ trong miền $0 < x < \pi$, thỏa mãn các điều kiện ban đầu và các điều kiện biên:

$$u(x, 0)= \sin 3x - 4\sin 10x \ ; 0 \le x \le \pi ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2\sin 4x + \sin 6x \ ,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0; \ t > 0.$$

3.9. Một màng rung hình vuông đồng chất, tại thời điểm $t = 0$ độ lệch của nó được xác định bởi $u(x, y, 0) =Axy(l - x)(l - y)$, trong đó $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq l$. Biết vận tốc ban đầu bằng không và các mép được gắn chặt, hãy xác định dao động của màng.

3.10. Một màng rung hình chữ nhật $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq d$, được gắn chặt ở các mép. Ở thời điểm $t = 0$, màng bị tác động bởi một xung tập trung tại tâm của màng, sao cho

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\sigma_\varepsilon} v_o \, dxdy = A,$$

trong đó A là hằng số, v_o là vận tốc ban đầu, σ_ε là miền lân cận của tâm của màng. Hãy xác định dao động của màng.

3.11. Tìm phân bố nhiệt độ tại thời điểm $t > 0$ trong một thanh đồng chất có độ dài l , thành bên cách nhiệt, hai đầu được giữ ở nhiệt độ không, phân bố nhiệt ban đầu có dạng:

$$u(x,0) = \frac{c\,x(l-x)}{l^2}.$$

3.12. Một dây rất mảnh, dẫn nhiệt dọc theo chiều dài của nó. Mặt khác, sợi dây cũng bức xạ nhiệt ra môi trường xung quanh (luôn giữ ở nhiệt độ không). Giả sử rằng tốc độ thay đổi theo thời gian của nhiệt độ do sự bức xạ là tỷ lệ với nhiệt độ. Chứng minh rằng, hàm $u(x,t)$ thỏa mãn phương trình dạng: $u_t = a^2u_{xx} - bu$, với b là hằng số dương. Chứng tỏ rằng, có thể đưa phương trình trên về dạng thuần nhất bằng cách đặt: $u(x, t) = v(x, t)w(t)$ với $w(t)$ thỏa mãn các điều kiện thích hợp.

3.13. Một thanh AB dài l , hai đầu A và B của nó đang được giữ ở các nhiệt độ U_1 và U_2 tương ứng cho đến khi thiết lập chế độ ổn định. Bất ngờ tăng nhiệt độ đầu A lên U_3 và tăng nhiệt độ đầu B lên U_4. Biết $U_1 < U_2 < U_3 < U_4$. Hãy tìm sự phân bố nhiệt của thanh kể từ thời điểm thay đổi nhiệt độ các đầu A và B.

3.14. Xác định sự phân bố nhiệt độ của thanh bằng đồng chiều dài $l = 100$ cm, có thành bên cách nhiệt, các đầu mút được giữ ở nhiệt độ bằng 0^oC, sự phân bố nhiệt độ ban đầu trong thanh được cho bởi:

$$u(x,0) = 50^o \sin\frac{2\pi x}{l}.$$

Cho biết: C = 0.09 Kcal.g^{-1}, ρ = 8.9 g.cm^{-3}, h = 0.9 Kcal.cm^{-1}.s.

3.16. Một thanh đồng chất chiều dài l có một mút cách nhiệt, còn một mút được giữ ở nhiệt độ không đổi U_o. Tìm phân bố nhiệt độ trong thanh biết nhiệt độ ban đầu được phân bố dạng: $u(x, 0) = f(x)$.

3.16. Tìm phân bố nhiệt độ trong một thanh đồng chất dài l. Biết nhiệt độ ban đầu bằng không, nhiệt độ tại mút $x = l$ bằng không, còn nhiệt độ tại mút $x = 0$ được cho bởi $u(0, t) = At$.

3.17. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$u(0, t) = 0,\ \ u(l, t) = Ae^{-t},\ u(x,0) = A\frac{x}{l}.$$

3.18. Giải phương trình $\Delta u(r,\theta, \phi) = 0$. Biết rằng, trên mặt cầu tâm O bán kính R thì $u(r,\theta, \phi)$ không phụ thuộc vào θ, nghĩa là $u(r, \theta, \phi) = f(\phi)$. Đồng thời giả sử hàm $u(r,\theta, \phi)$ triệt tiêu khi r tiến tới vô cùng.

Chương 4

HÀM BIẾN PHỨC

4.1. Số phức

4.1.1. Số phức

Như chúng ta đã biết, phương trình bậc hai $x^2+1 = 0$ sẽ vô nghiệm theo cách hiểu thông thường trong trường số thực. Tuy nhiên, chúng ta có thể mở rộng sang *trường số phức* để phương trình trên vẫn tồn tại nghiệm. Trong trường số phức, người ta định nghĩa *đơn vị ảo* (ký hiệu là i) thỏa mãn điều kiện [8]:

$$i^2 = 1, \tag{4.1}$$

với khái niệm đơn vị ảo i, người ta định nghĩa số phức z dưới dạng đại số như sau:

$$z = x + iy, \tag{4.2}$$

trong đó x và y là các số thực biểu diễn tương ứng với *phần thực* và *phần ảo* của số phức z. Vì vậy, ta có thể xem số thực là trường hợp đặc biệt của số phức khi phần ảo bằng không.

Người ta định nghĩa *liên hợp phức* của z hay là *số phức liên hợp* (ký hiệu là z^*) được xác định bởi

$$z^* = x - iy. \tag{4.3}$$

Dựa vào định nghĩa liên hợp phức ta gọi *độ lớn* (đôi khi gọi là *biên độ* hoặc là module) của số phức z, ký hiệu là |z| được xác định bởi:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}. \tag{4.4}$$

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

4.1.2. Các phép toán cơ bản trên số phức

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, giữa hai số phức này có các phép toán cơ bản dưới đây:

a) Phép cộng: $$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{4.5}$$

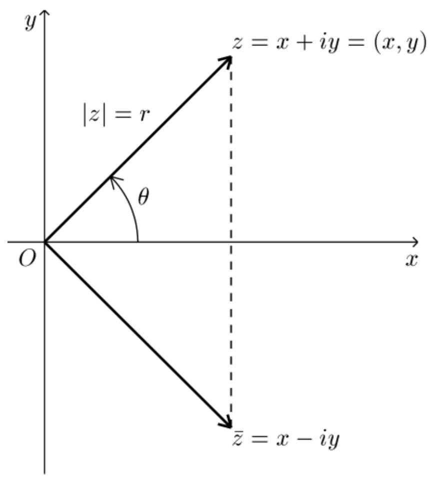
b) Phép trừ: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ (4.6)

c) Phép nhân: $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)$ (4.7)

d) Phép chia: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$. (4.8)

4.1.3. Dạng lượng giác của số phức và định lí De Moivre

Ngoài dạng đại số thì số phức còn có thể được biểu diễn dưới dạng hình học và dạng lượng giác. Ta có thể xem cặp số thực (x, y) như là một số phức với phần thực và phần ảo tương ứng là x và y. Khi đó, ta có thể biểu diễn số phức theo *dạng hình học* trong mặt phẳng xy (còn gọi là *mặt phẳng phức*) như trên hình 4.1.



Hình 4.1. Biểu diễn hình học của số phức trong mặt phẳng phức.

Khi đó, nhờ tính chất lượng giác ta có thể biểu diễn số phức z dưới *dạng lượng giác*:

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{4.4}$$

với

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.5}$$

được gọi là *biên độ*, còn φ được gọi là *argument*. Như vậy, bên cạnh dạng đại số ta còn có thể biểu diễn số phức dưới dạng lượng giác như (4.4) và (4.5). Cách biểu diễn lượng giác có một số thuận tiện khi tính toán nhờ sử dụng các tính chất quan trọng sau:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{4.6}$$

$$\frac{z_{12}}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \tag{4.7}$$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)], \tag{4.8}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})\right], k = 0, 1, 2, \ldots, n -1 \tag{4.9}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{4.10}$$

Công thức (4.10) được gọi là *công thức Euler*.

4.2. Hàm biến phức

4.2.1. Khái niệm

Cho tập các số phức z và giả sử ứng với mỗi z sẽ có tương ứng một hoặc nhiều giá trị của số phức w. Khi đó,w được gọi là hàm của biến số phức z, ký hiệu là $w = f(z)$.

Một hàm biến phức được gọi là *đơn trị* nếu mỗi giá trị của z tương ứng với một giá trị của w. Nói chung, chúng ta có thể viết:

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

trong đó u và v là các hàm thực của x và y.

Ví dụ 4.1. Cho $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$; khi đó $u(x, y) = x^2 - y^2$ và $v(x,y) = 2xy$ tương ứng là phần thực và phần ảo của w.

Ví dụ 4.2. Vì $e^{2\pi ki} = 1$, nên dạng lượng giác của z là $z = \rho e^{i(\theta + 2\pi k)}$ dạng này thực chất là các hàm logarit và hàm mũ được suy ngược với định nghĩa sau đây của lnz là:

$$lnz = ln\rho + (\theta + 2\pi k)i, \text{ với } k = 0, 1, 2\ldots n.$$

Mỗi giá trị của k xác định một hàm đơn trị từ một hệ các hàm đa trị này, đây là các nhánh mà từ đó (trong phạm vi của các biến phức) một hàm đơn trị có thể được xây dựng.

Ví dụ 4.3. Biểu diễn hàm $w = \dfrac{1}{1-z}$ thành dạng $u(x,y) + iv(x,y)$, trong đó u và v là các hàm thực.

Ta có:

$$w = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(x+iy)} = \frac{1}{1-x-iy}.\frac{1-x+iy}{1-x+iy} = \frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$$

Do đó

$$u(x,y) = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{y}{(1-x)^2+y^2}.$$

Chúng ta định nghĩa các hàm biến phức cơ bản bằng cách sử dụng khai triển các hàm biến thực tương ứng, rồi thay biến thực x bởi biến phức z.

Ví dụ 4.4. Chúng ta định nghĩa:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots ,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

4.2.2. Giới hạn và liên tục

Định nghĩa về giới hạn và liên tục đối với các hàm biến phức tương tự như định nghĩa đối với các hàm biến thực. Theo đó, một hàm $f(z)$ được gọi là *có giới hạn* bằng l khi z tiến tới z_0 nếu nó đơn trị trong lân cận z_0, đồng thời với bất kỳ $\varepsilon > 0$ cho trước thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(z) - l| < \varepsilon$ với $0 < |z - z_0| < \delta$.

Tương tự, $f(z)$ được gọi là *liên tục* tại z_0, nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(z) - l| < \varepsilon$ với bất kỳ $|z - z_0| < \delta$. Ngoài ra, $f(z)$ liên tục tại z_0, nếu $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$.

Chú ý: Các định nghĩa này có dạng giống với các hàm biến thực, nhưng cần lưu ý điều kiện $|z - z_0| < \delta$ đối với số phức sẽ có dạng:

$$\left|\left(x-x_0\right)+i\left(y-y_0\right)\right|=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\delta . \qquad (4.11)$$

4.2.3. Đạo hàm

Giả sử $f(z)$ là một hàm đơn trị trong một miền C nào đó, người ta định nghĩa *đạo hàm* của $f(z)$, được ký hiệu là $f'(z)$:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z} \qquad (4.12)$$

sao cho tồn tại giới hạn không phụ thuộc vào cách thức $\Delta z \to 0$.

Nếu giới hạn (4.12) tồn tại đối với $z = z_0$ thì $f(z)$ được gọi là *giải tích* tại z_0. Nếu giới hạn đó tồn tại với mọi z trong miền C, thì $f(z)$ được gọi là giải tích trong C. Để $f(z)$ giải tích thì nó phải là hàm đơn trị và liên tục.

Các quy tắc lấy đạo hàm đối với các hàm biến phức cũng giống như các quay tắc đối với các hàm biến thực. Chẳng hạn:

$$\frac{d}{dz}(z^n)=nz^{n-1},\frac{d}{dz}(\sin z)=\cos z,\ \ldots$$

Ví dụ 4.5. Cho hàm số $w=f\left(z\right)=\dfrac{1+z}{1-z}$. Hãy xác định $\dfrac{dw}{dz}$.

Cách 1. Sử dụng định nghĩa (4.12), ta có :

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{1+\left(z+\Delta z\right)}{1-\left(z+\Delta z\right)}-\dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{\left(1-z-\Delta z\right)\left(1-z\right)}=\frac{2}{\left(1-z\right)^2},$$

với $z \neq 1$.

Cách 2: Sử dụng quy tắc thông thường của đạo hàm với điều kiện $z \neq 1$, ta có:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{(1-z)\frac{d}{dz}(1+z)-(1+z)\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2}=\frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2}=\frac{2}{(1-z)^2}$$

Rõ ràng, hàm số đã cho giải tích với mọi miền ngoại trừ tại điểm $z = 1$.

4.2.4. Phương trình Cauchy - Riemann

Điều kiện cần để hàm $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích trong miền $\Re$ là u và v phải thỏa mãn các phương trình Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4.13a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.13b}$$

Nếu các đạo hàm riêng trong (4.13) liên tục trong $\Re$, thì các phương trình này là các điều kiện đủ để $f(z)$ giải tích trong $\Re$.

Nếu các đạo hàm riêng bậc hai của u và v đối với x và y tồn tại và liên tục, thì chúng ta tìm được bằng cách lấy đạo hàm riêng của (4.13ab) theo y và $x$ta được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{4.14a}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{4.14b}$$

Như vậy, các phần thực và phần ảo thỏa mãn phương trình Laplace hai chiều. Các hàm thỏa mãn phương trình Laplace được gọi là các hàm điều hòa.

Ví dụ 4.6. Trong động học chất khí và cơ học chất lưu, các hàm ϕ và ψ (được gọi tương ứng là *hàm thế vận tốc* và *hàm dòng*) thỏa mãn:

$$f(z) = \phi + i\psi,$$

trong đó $f(z)$ là hàm giải tích.

Cho $\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$. Hãy tìm: ψ và $f(z)$.

Ta có: từ các phương trình Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

ta rút ra được:

$$(1)\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=2x+4,\qquad\qquad (2)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=2y-2$$

Lấy tích phân (1), ta được $\psi = 2xy + 4y + F(x)$. Thay vào (2), dẫn đến

$$2y + F'(x) = 2y - 2 \text{ hay } F'(x) = -2 \text{ và } F(x) = -2x + c.$$

Do đó:

$$\psi = 2xy + 4y - 2x + c.$$

Từ kết quả trên, ta có:

$$f(z) = \phi + i\psi = x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x + c)$$
$$= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 4(x + iy) - 2i(x + iy) + ic = z^2 + 4z - 2iz + c_1.$$

trong đó c_1 là hằng số bất kỳ.

4.2.5. Tích phân

Giả sử hàm $f(z)$ hữu hạn, đơn trị và liên tục trong miền $\Re$. Chúng ta định nghĩa tích phân của $f(z)$ dọc theo đường cong C trong miền $\Re$ từ điểm z_1 đến điểm z_2, trong đó $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là:

$$\int_C f(z)dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u+iv)(dx+idy) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (udx - vdy) + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (vdx + udy) \quad (4.15)$$

Với định nghĩa này, tích phân của hàm biến phức phụ thuộc vào các tích phân đường đối với các hàm thực.

Các quy tắc đối với các tích phân phức cũng tương tự như các tích phân thực. Một kết quả quan trọng là:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz| \le M\int_C ds = ML, \qquad (4.16)$$

trong đó M là giới hạn trên của $|f(z)|$ trên đường cong C, tức là, $|f(z)| \le M$, cònL là chiều dài của đường cong C.

Ví dụ 4.7. Tính $I = \int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$ dọc theo đường thẳng nối 1 + *i* và 2 + 4*i*.

Ta có:

$$I = \int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \int_{(1.1)}^{(2,4)} (x+iy)^2 (dx+idy) = \int_{(1.1)}^{(2,4)} \left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)(dx+idy)$$
$$= \int_{(1.1)}^{(2,4)} \left(x^2 - y^2\right) dx - 2xydy + i\int_{(1.1)}^{(2,4)} 2xydx + \left(x^2 - y^2\right) dy\,.$$

Trong mặt phẳng phức, đường thẳng nối các điểm (1, 1) và (2, 4) có phương trình:

$$y - 1 = \frac{4-1}{2-1}(x-1) \text{ hay } y = 3x - 2.$$

Do đó, chúng ta tìm được:

$$I = \int_1^2 \left\{\left[x^2 - (3x-2)^2\right] - 2x(3x-2)3\right\} dx$$
$$+ i\int_1^2 \left\{2x(3x-2) + \left[x^2 - (3x-2)^2\, 3\right]\right\} dx = -\frac{86}{3} - 6i\,.$$

a. Định lí Cauchy

Giả sử *C* là một đường cong kín. Nếu *f*(*z*) giải tích trên toàn miền được giới hạn bởi *C* thì chúng ta có *định lí Cauchy*:

$$\oint_C f(z)dz = 0. \qquad (4.17)$$

Chứng minh:

Ta có:

$$\oint_c f(z)dz = \oint_c (u+iv)(dx+idy) = \oint_c udx - vdy + i\oint_c vdx - udy\,.$$

Mặt khác, theo định lí Green:

$$\oint_c udx - vdy = \iint_{\mathrm{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy\,,$$

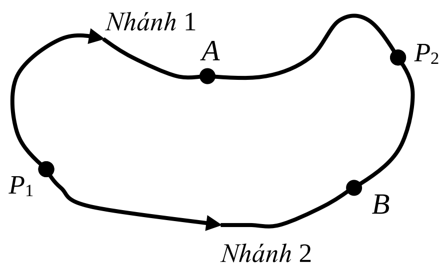
trong đó $\Re$ là miền được giới hạn bởi biên *C*.

Vì $f(z)$ giải tích nên $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, nên các tích phân trên bằng không, từ đó ta có hệ thức (4.17).

Hệ quả: nếu $f'(z)$ liên tục thì tích phân $\int_{P_1}^{P_2} f(z)dz$ có giá trị không phụ thuộc vào đường cong nối các điểm P_1 và P_2. Khi đó, tích phân được tính bởi:

$$\int_{P_1}^{P_2} f(z)dz = F(P_2) - F(P_1), \text{ trong đó } F'(z) = f(z). \qquad (4.18)$$

Thật vậy, khảo sát hai đường cong nối các điểm P_1 và P_2 như hình 4.2.



Hình 4.2. Đường cong nối hai điểm P_1 và P_2.

Theo định lí Cauchy ta có:

$$\int_{P_1AP_2BP_1} f(z)dz = 0.$$

Do đó,

$$\int_{P_1AP_2} f(z)dz + \int_{P_2BP_1} f(z)dz = 0$$

hoặc

$$\int_{P_1AP_2} f(z)dz = -\int_{P_2BP_1} f(z)dz = \int_{P_1BP_2} f(z)dz.$$

Như vậy, tích phân dọc theo đường cong P_1AP_2 (nhánh 1) bằng tích phân dọc theo P_1BP_2 (nhánh 2), tức là không phụ thuộc vào đường cong nối điểm P_1 và P_2.

Ví dụ 4.8. Tính tích phân trong ví dụ 4.7 dựa theo định lí Cauchy.

Vì các tích phân đường không phụ thuộc vào đường cong nên ta có thể tích phân trực tiếp giống như các biến thực. Khi đó:

$$I = \int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{1_i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{86}{3} - 6i\,.$$

b. Công thức tích phân của Cauchy

Nếu $f(z)$ giải tích bên trong và trên đường cong kín đơn C và a là một điểm ở bên trong C, thì:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z-a} dz\,, \tag{4.19}$$

trong đó C được lấy theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Ngoài ra, đạo hàm bậc n của $f(z)$ tại $z = a$, được cho bởi:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz\,, \tag{4.20}$$

được gọi là *công thức tích phân của Cauchy*.

Rõ ràng, nếu hàm $f(z)$ được xác định trên đường cong kín C thì nó cũng được xác định trong C. Ngoài ra, các đạo hàm khác tại các điểm trong C cũng có thể được xác định. Vì vậy, công thức tích phân của Cauchy rất có ích trong việc áp dụng để tính các tích phân.

Ví dụ 4.9. Tính $I = \oint_C \frac{\cos z}{z-\pi} dz$, trong đó C là đường tròn $|z - 1| = 3$.

Vì $z = \pi$ nằm bên trong C, nên theo công thức Cauchy, ta có:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi} dz = \cos\pi = -1\,.$$

Với $f(z) = \cos z$ và $a = \pi$ thì:

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{z-\pi} dz = -2\pi .$$

Ví dụ 4.10. Tính $I = \oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$, với C là đường tròn đơn chứa điểm z = 1.

Theo công thức tích phân Cauchy, ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz .$$

Với n = 2 và f(z) = 5z^2 – 3z + 2, thì $f''(1)$ = 10. Do đó:

$$10 = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$$

hay

$$\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz = 10\pi i .$$

Vậy $I = 10\pi i$.

4.2.6. Chuỗi Taylor

Giả sử f(z) giải tích bên trong và trên đường tròn C có tâm tại z = a. Đối với tất cả các điểm z trong đường tròn, *chuỗi Taylor* của hàm f(z) xung quanh điểm a được cho bởi:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \ldots \quad (4.21)$$

Nếu z = 0 thì chuỗi Taylor trở thành *chuỗi Maclaurin*.

Ví dụ 4.11. Với các giá trị nào của z thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$ hội tụ?

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{(z-i)^n}\right| = \frac{|z-i|}{3}.$$

Chuỗi hội tụ nếu $|z - i| < 3$ và phân kỳ nếu $|z - i| > 3$.

Nếu $|z - i| = 3$ thì $z - i = 3e^{i\theta}$. Lúc đó, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$. Chuỗi này phân kỳ vì số hạng thứ n không tiến tới không khi $n\to\infty$. Như vậy, chuỗi nói trên sẽ hội tụ bên trong đường tròn $|z - i| = 3$ nhưng không hội tụ trên đường biên.

4.2.7. Các điểm kỳ dị

Một điểm z_0 được gọi là *điểm kì dị* của hàm $f(z)$ nếu tại điểm đó hàm $f(z)$ không giải tích. Chúng ta phân biệt một số loại điểm kì dị sau đây:

- *Điểm bất thường cô lập*: Điểm z_0 được gọi là điểm bất thường cô lập nếu ta có thể tìm được $\delta > 0$ sao cho hàm $f(z)$ giải tích tại mọi điểm trên miền $|z - z_0| < \delta$ ngoại trừ z_0.

  Ví dụ 4.12: Hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)}$ nhận điểm $z_0 = 2$ làm điểm bất thường cô lập.

- *Điểm cực*: Nếu chúng ta có thể tìm được số nguyên dương n sao cho:

  $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = A \neq 0$ thì z_0 được gọi là *điểm cực cấp n*. Khi $n = 1$ ta gọi z_0 là cực đơn. Ví dụ 4.12 trên đây thì $z_0 = 2$ là cực đơn.

- *Điểm kì dị bỏ được*: Điểm z_0 được gọi là điểm kì dị bỏ được của hàm $f(z)$ nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ tồn tại.

Ví dụ 4.13: Hàm $f\left(z\right)=\dfrac{\sin z}{z}$ có điểm bất thường tại $z_0 = 0$. Nhưng $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$ (tồn tại giới hạn) nên điểm $z_0 = 0$ được gọi là *điểm bất thường bỏ được*.

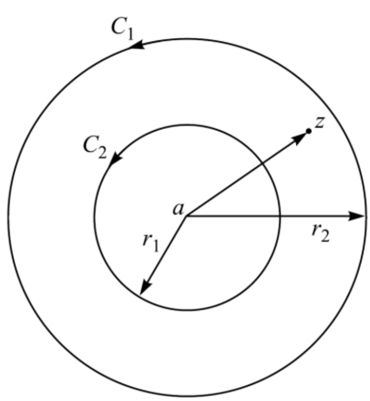
- *Điểm kì dị cốt yếu*: Điểm z_0 được gọi là điểm kì dị cốt yếu của hàm $f(z)$ nếu nó có cực cấp n bất kì nhưng hàm$(z - z_0)^n f(x)$.

  Ví dụ 4.14: hàm $f(z) = e^{1/(z-2)}$ có điểm kì dị cốt yếu tại $z_0 = 2$.

4.2.8. Chuỗi Laurent

Khai triển hàm số $f(z)$ theo chuỗi Taylor chỉ thỏa mãn trường hợp hàm này giải tích tại điểm điểm $z = a$. Trong trường hợp điểm $z = a$ là kỳ dị thì khai triển Taylor sẽ không còn hiệu lực nên người ta thường dùng khai triển Laurent.

Giả sử hàm $f(z)$ có điểm cực cấp n tại $z = a$ nhưng giải tích tại tất cả các điểm trên đường tròn C trong hình vành khăn tạo bởi các đường tròn C_1 và C_2 như hình 4.3 (C nằm trong miền tạo bởi C_1 và C_2). Lúc đó, ta có thể khai triển $f(z)$ thành chuỗi Laurent [8] như sau:



Hình 4.3. Minh họa khai triển Laurent trong miền nằm giữa C_1 và C_2.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n , \tag{4.22a}$$

trong đó,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (4.22b)$$

Các số hạng ứng với $n < 0$ được gọi là *phần chính*, các số hạng còn lại (ứng với $n > 0$) được gọi là *phần giải tích*.

Ví dụ 4.15. Tìm chuỗi Laurent quanh điểm bất thường z = 1 của hàm dưới đây. Xác định loại điểm bất thường và cho biết miền hội tụ của chuỗi.

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} \quad \text{tại } z = 1.$$

Đặt z – 1 = u, khi đó z = u + 1 và:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{1+u}}{u^2} = e\frac{e^u}{u^2} = \frac{e}{u^2}\left\{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + ...\right\}$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \frac{e(z-1)^2}{4!} + ...$$

Như vậy, $z = 1$ là điểm cực bậc hai và chuỗi hội tụ đối với mọi $z \neq 1$.

4.2.9. Thặng dư

Xét phần chính của khai triển Laurent (4.22a,b). Trong phép khai triển đó, hệ số a_{-1} được gọi là *thặng dư* của $f(z)$ tại điểm cực $z = a$ (ký hiệu là $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$)và được tính bởi:

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz, \qquad (4.23)$$

hay

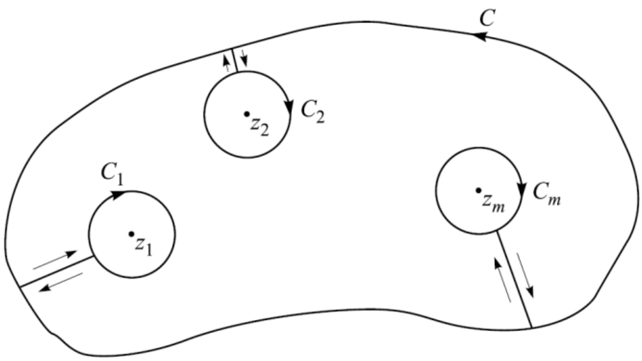
$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}. \qquad (4.24)$$

Tích phân trên được lấy ngược chiều kim đồng hồ dọc theo đường tròn đơn C bao quanh điểm cực a. Như vậy, tích phân của $f(z)$ quanh một đường cong khép kín chứa điểm cực đơn của $f(z)$ bằng $2\pi i$ lần giá trị thặng dư tại điểm cực. Tổng quát hơn, chúng ta có *định lí về thặng dư* như sau [8]:

Định lí về thặng dư: *Giả sử hàm f*(z) *giải tích tại hầu hết các bên trong và trên đường biên C ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm cực* $z_1, z_2 \dots z_m$ (*Hình 4.4*) *có các giá trị thặng dư tương ứng* a_{-1}, b_{-1}, c_{-1} … *thì*:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots\right) \quad (4.27)$$

tức là, tích phân của f(z) *bằng* 2πi *lần tổng của các giá trị thặng dư của f*(z) *tại các điểm cực nằm trong C*.



Hình 4.4. Minh họa định lí về thặng dư.

Trong trường hợp hàm $f(z)$ có một cực đơn tại $z = a$, lúc đó $(z - a)f(z)$ giải tích tại a nên từ khai triển Laurent ta suy ra được:

$$a_{-1} = \lim_{z \to a}(z - a) f(z). \quad (4.28)$$

Ví dụ 4.16. Xác định thặng dư của $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ tại các điểm cực z = 2, i, $-i$.

Áp dụng công thức (4.28) ta có:

Thặng dư tại $z = 2$ là:

$$\lim_{z\to 2}(z-2)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right\}=\frac{4}{5}.$$

Thặng dư tại $z = i$ là:

$$\lim_{z\to i}(z-i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{i^2}{(i-2)(2i)}=\frac{1-2i}{10}.$$

Thặng dư tại $z = - i$ là:

$$\lim_{z\to -i}(z+i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{i^2}{(-i-2)(-2i)}=\frac{1+2i}{10}.$$

Ngoài cách tính thặng dư như (4.28), chúng ta còn có thể tính theo cách khác nếu $f(z)$ được biểu diễn dạng phân thức:

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}, \tag{4.29}$$

với, $p(z)$ và $q(z)$ giải tích tại $z = a$ đồng thời $p(a) \neq 0$ và $q(a) = 0$. Lúc đó, thặng dư của $f(z)$ tại a được tính bởi [8]:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{p(a)}{q'(a)}, \tag{4.30}$$

trong đó $q'(a)$ là đạo hàm của $q(z)$ tại điểm a.

Thặng dư liên hệ với công thức tích phân (4.27) nên nó thường được ứng dụng trong tính các tích phân hàm thực và hàm phức.

4.2.10. Tính các tích phân xác định

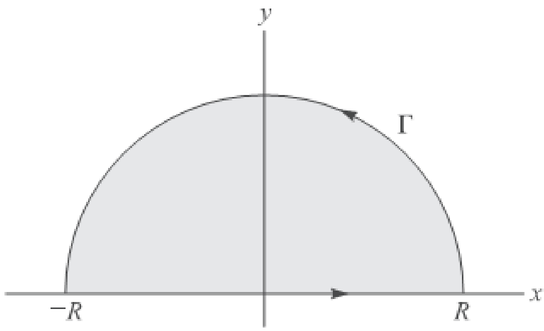
Khi tính một số tích phân xác định, chúng ta có thể sử dụng định lí thặng dư đối với một hàm thích hợp $f(z)$ xác định trong đường cong C được chọn một cách tiện lợi nhất. Sau đây là các dạng thường gặp:

a) Tích phân dạng:

$$\int_0^\infty F(x)dx, \text{ với } F(x) \text{ là một hàm chẵn.}$$

Ta xét tích phân $\oint_C F(z)dz$ dọc theo đường cong C bao quanh một đường dọc theo trục *x* từ -*R* đến +*R* và nửa đường tròn phía trên trục *x*.

Ví dụ 4.17. Tính $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.



Hình 4.5. Khảo sát tích phân trong đường cong C.

Xét tích phân $\oint\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, với *C* là một đường cong kín bao gồm một đường thẳng từ -*R* đến *R* và nửa đường tròn Γ được định hướng theo chiều dương ngược chiều kim đồng hồ như hình 4.5.

Ta thấy, $z = e^{\pi i/4}$, $z = e^{3\pi i/4}$, $z = e^{5\pi i/4}$, $z = e^{7\pi i/}4$ là các điểm cực đơn của $1/(z^4+1)$. Tuy nhiên, chỉ có các điểm cực $z = e^{\pi i/4}$ và $z = e^{3\pi i/4}$ nằm trong đường tròn *C*. Do đó, sử dụng quy tắc lấy thặng dư, ta có:

Thặng dư tại $e^{\pi i/4}$ là:

$$\lim_{z \to e^{\pi i/4}} \left\{ \left(z - e^{\pi i/4}\right) \frac{1}{z^4+1} \right\} = \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4} e^{\pi i/4},$$

Thặng dư tại $e^{3\pi i/4}$ là

$$\lim_{z \to e^{3\pi i/4}} \left\{ \left(z - e^{3\pi i/4}\right) \frac{1}{z^4+1} \right\} = \lim_{z \to e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4} e^{-\pi i/4}.$$

Như vậy:

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left\{-\frac{1}{4}e^{\pi i/4} + \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}\right\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \qquad (*)$$

Tức là,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \qquad (**)$$

Lấy giới hạn cả hai vế của (**) khi $R\to\infty$, ta được:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Từ đó, ta dễ dàng suy ra:

$$I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

b) Tích phân dạng:

$\int\limits_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$, G là một hàm hữu tỉ của $\sin\theta$ và $\cos\theta$.

Ta đặt, $z = e^{i\theta}$, khi đó:

$\sin\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$ hay $d\theta = dz/iz$.

Tích phân đã cho tương đương với $\oint_C F(z)dz$, trong đó C là đường tròn đơn vị có tâm tại gốc tọa độ.

Ví dụ 4.18. Tính tích phân: $I = \int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{5 + 3\sin\theta}$.

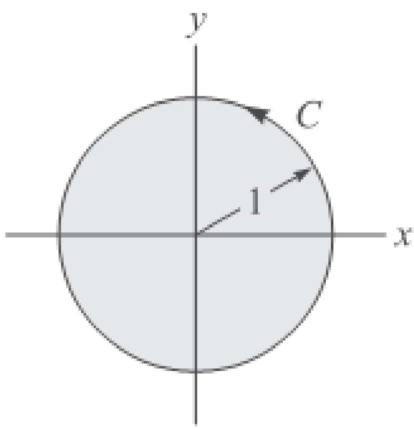
Đặt $z = e^{i\theta}$ ta có:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta .$$

Khi đó:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{5+3\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} = \oint_C \frac{2dz}{3z^2+10iz-3},$$

với C là đường tròn đơn vị có tâm tại gốc tọa độ, như hình 4.6.



Hình 4.6. Đường tròn đơn vị C.

Các cực của $\dfrac{2}{3z^2+10iz-3}$ là các cực đơn:

$$z = \frac{-10i \pm \sqrt{-100+36}}{6}, \ \frac{-10i \pm 8i}{6}, \ -3i \text{ và } -\frac{i}{3}.$$

Do chỉ có $-\dfrac{i}{3}$ nằm trong C nên thặng dư tại $-\dfrac{i}{3}$ là:

$$\lim_{z\to i/2}\left(z+\frac{i}{3}\right)\left(\frac{2}{3z^2+10iz-3}\right) = \lim_{z\to -i/2}\frac{2}{6z+10i} = \frac{1}{4i}.$$

Vậy:

$$I = \oint_C \frac{2dz}{3z^2 + 10iz - 3} = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

c) Tích phân dạng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx \\ \sin mx\end{Bmatrix}, \text{ với } F(x) \text{ là một hàm hữu tỷ.}$$

Ta khảo sát tích phân $\oint_c F(z)e^{imz}$, trong đó C là một đường cong giống như đường cong trong dạng a).

Ví dụ 4.19. Chứng minh rằng $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}$, $m > 0$.

Ta khảo sát tích phân $\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$, trong đó C là đường tròn như trong ví dụ 4.17. Tích phân có các điểm cực đơn tại $z = \pm i$, nhưng chỉ có $z = i$ nằm trong C.

Thặng dư tại $z = i$ là

$$\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}.$$

Do đó:

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) = \pi e^{-m},$$

hay

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imx}}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2+1} = \pi e^{-m}.$$

Tức là:

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{miz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$

Như vậy:

$$2\int_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}\,.$$

Lấy giới hạn khi $R \to \infty$, ta thấy rằng tích phân quanh Γ tiến tới không, chúng ta thu được kết quả cần tìm.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1. Xác định quỹ tích các điểm được cho bởi:

a) $|z - 2| = 3$;

b) $|z - 2| = |z + 4|$;

c) $|z - 3| + |z + 3| = 10$.

4.2. Hãy biểu diễn mỗi một hàm sau đây thành dạng $u(x,y) + iv(x,y)$, trong đó u và v là các hàm thực:

a) z^3 ; b) e^{3z} ; c) lnz.

4.3. Chứng minh rằng:

(a) $\sin(x + iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$,

(b) $\cos(x + iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$,

4.4. a) Cho $w = f\left(z\right) = \dfrac{1+z}{1-z}$, xác định $\dfrac{dw}{dz}$;

b) Chứng minh rằng w không giải tích.

4.5. Tính $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$

a) Dọc theo parapol $x = t$, $y = t^2$, trong đó $1 \leq t \leq 2$.

b) dọc theo đường thẳng $1 + i$ tới $2 + i$ và sau đó tới $2 + 4i$.

4.6. Hãy tính $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-a}dz$, trong đó C là:

a) đường tròn $|z| = 1$.

b) đường tròn $|z+i| = 4$.

4.7. Tính a) $\oint_C \dfrac{\cos z}{z-\pi}dz$; b) $\oint_C \dfrac{e^x}{z\left(z+1\right)}dz$, trong đó C là đường tròn $|z - 1| = 3$.

4.8. Tính $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$, trong đó C là đường tròn kín đơn chứa điểm z = 1.

4.9. Với các giá trị nào của *z* thì các chuỗi sau đây hội tụ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

4.10. Xác định các điểm bất thường trong mặt phẳng hữu hạn *z* (nếu có) và tên gọi của chúng.

a) $\frac{z^2}{(z+1)^3}$; b) $\frac{2z^3-z+1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$;

c) $\frac{\sin mz}{z^2+2z+2}$, $m \neq 0$; e) $e^{-1/(z-1)^2}$.

4.11. Tìm chuỗi Laurent quanh điểm bất thường được chỉ ra của mỗi hàm sau đây. Nêu tên gọi điểm bất thường trong mỗi trường hợp và cho biết miền hội tụ của mỗi chuỗi.

a) $z\cos\frac{1}{z}$, z = 0 ; b) $\frac{\sin z}{z-\pi}$, z = π ;

c) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, z = 1 ; d) $\frac{1}{z(z+2)^3}$, z = 0, -2.

4.12. Xác định thặng dư của mỗi hàm số tại các điểm cực đã chỉ ra.

a) $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, z = 2, *i*, -*i* ; b) $\frac{1}{z(z+2)^3}$, z = 0, -2 ;

c) $\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$, z = 3 ; d) cosz , z = 5π.

4.13. Tính $\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2}$, trong đó C được cho bởi |*z*| = 10.

4.14. Chứng minh rằng: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{7\pi}{50}$.

4.15. Tính $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$.

4.16. Chứng tỏ rằng $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12}$.

Chương 5
BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN

5.1. Đại cương về biến đổi tích phân

Biến đổi tích phân được ứng dụng nhiều trong giải các phương trình vi tích phân. Ưu điểm chính của biến đổi tích phân là chuyển các toán tử vi tích phân sang các phép tính đại số trong không gian ảnh của phép biến đổi mà ở đó dễ tìm nghiệm hơn. Chương này trình bày hai biến đổi tích phân thường gặp: *biến đổi Fourier* và *biến đổi Laplace*.

5.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$, người ta định nghĩa biến đổi tích phân của hàm $f(x)$ là hàm $F(\alpha)$ được biểu diễn dưới dạng tích phân phụ thuộc tham số:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)K(\alpha, x)dx. \tag{5.1}$$

Trong biểu thức (5.1), hàm $F(\alpha)$ được gọi là *ảnh* của $f(x)$ qua *phép biến đổi tích phân* (5.1) bởi *nhân* $K(\alpha, x)$, còn $f(x)$ được gọi là *gốc* của $F(\alpha)$. Phép biến đổi (5,1) có thể được mô tả như là ánh xạ hàm $f(x)$ trong *không gian cấu hình* x (với $x = x_1, x_2, \ldots x_n$) sang hàm $F(\alpha)$ trong *không gian ảnh* α (với $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$).

Trong trường hợp tổng quát, x và α là ký hiệu chung cho tập hợp các biến tương ứng trong không gian cấu hình và không gian của phép biến đổi. Sau này, khi xét từng bài toán cụ thể ta có thể ký hiệu lại các không gian x và α cho phù hợp với quy ước thông dụng trong vật lí. Chẳng hạn khi x và α đặc trưng cho tọa độ và động lượng trong không gian ba chiều thì chúng tương ứng được ký hiệu là $\vec{r}$ và $\vec{p}$, tương tự khi muốn đặc trưng cho tần số góc và thời gian thì ta ký hiệu ω và t,...

Để thống nhất cách viết, ta quy ước *hàm gốc viết bằng chữ thường, hàm ảnh viết bằng chữ in hoa tương ứng*.

Tuỳ thuộc vào dạng của nhân $K(\alpha, x)$ chúng ta có các phép biến đổi tích phân khác nhau. Một số ví dụ:

- Khi $K(\alpha, x)$ có dạng $e^{-i\alpha x}$, tương ứng với *biến đổi Fourier*:

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx.$$

- Khi $K(\alpha, x)$ có dạng $e^{-\alpha x}$, tương ứng với *biến đổi Laplace*:

$$F(\alpha)=\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}dx.$$

- Tương tự ta có *biến đổi Hankel, biến đổi Mellin*:

$$F(\alpha)=\int_{0}^{+\infty} f(x)xJ_n(\alpha x)dx \quad \text{(biến đổi Hankel),}$$

$$F(\alpha)=\int_{0}^{+\infty} f(x)x^{\alpha-1}dx \quad \text{(biến đổi Mellin).}$$

5.1.2. Tính chất chung

Với định nghĩa (5.1), ta thấy tính chất chung của phép biến đổi tích phân là *tuyến tính*. Thật vậy, với c_1 và c_2 là các hằng số thì ta dễ dàng nghiệm lại được các hệ thức sau:

$$\int_a^b c_1 f(x)K(\alpha,x)dx = c_1\int_a^b f(x)K(\alpha,x)dx, \tag{5.2}$$

$$\int_a^b \left[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\right]K(\alpha,x)dx = c_1\int_a^b f_1(x)K(\alpha,x)dx + c_2\int_a^b f_2(x)K(\alpha,x)dx. \tag{5.3}$$

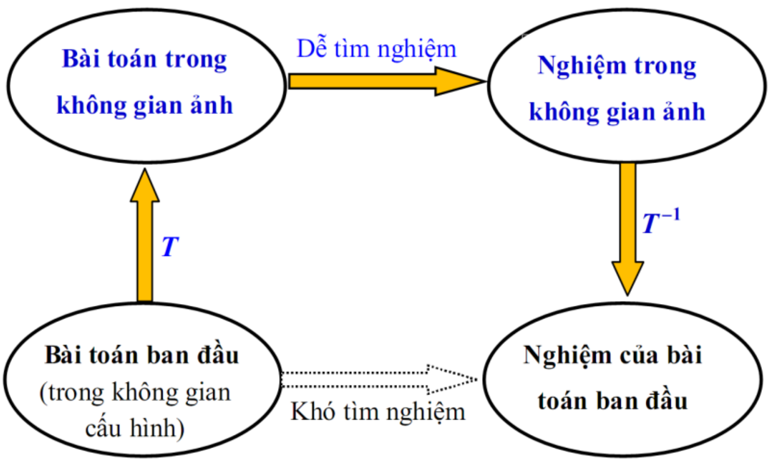
Chúng ta tạm thời ký hiệu toán tử biến đổi tích phân tuyến tính ở trên bằng chữ T (về sau, ký hiệu này sẽ được thay đổi cho phù hợp với từng phép biến đổi cụ thể), lúc đó:

$$F(\alpha) = T\{f(x)\}. \tag{5.4}$$

Khi đó, hàm $f(x)$ có thể được xác định theo $F(\alpha)$ thông qua phép biến đổi ngược (ký hiệu là T^{-1}):

$$f(x) = T^{-1}\{F(\alpha)\}. \tag{5.5}$$

Trong thực tế, khi tìm nghiệm trực tiếp của bài toán gốc (trong không gian cấu hình) khó khăn, chúng ta sử dụng phép biến đổi tích phân để chuyển bài toán sang không gian ảnh mà trong đó lời giải của bài toán tìm được dễ dàng hơn. Từ đó, thực hiện biến đổi ngược để chuyển nghiệm trong không gian ảnh thành nghiệm cần tìm của bài toán (trong không gian cấu hình).



Hình 5.1. Quy tắc tìm nghiệm của bài toán bằng biến đổi tích phân.

Quy tắc chung cho áp dụng các phép biến đổi tích phân được minh họa trên hình 5.1 và được chia làm 3 bước sau:

- **Bước 1**: Chuyển bài toán gốc ban đầu trong không gian cấu hình sang bài toán tương ứng trong không gian ảnh thông qua phép biến đổi tích phân *T*;
- **Bước 2**: Giải bài toán, tìm nghiệm trong không gian ảnh;

- **Bước 3**: Thực hiện biến đổi ngược để chuyển nghiệm trong không gian ảnh thành nghiệm trong không gian cấu hình.

5.2. Biến đổi Fourier

5.2.1. Định nghĩa

Biến đổi Fourier (ký hiệu bởi $\mathcal{F}$) của hàm $f(x)$ là hàm $F(\omega)$ được định nghĩa [3, 16]:

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx. \tag{5.6}$$

Trong công thức (5.6), $F(\omega)=\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}$ được gọi là *biến đổi Fourier* hoặc là *ảnh Fourier* của hàm $f(x)$; còn hàm $f(x)$ được gọi là *hàm gốc* của hàm ảnh $F(\omega)$.

Mối liên hệ ngược giữa gốc và ảnh được thực hiện qua *phép biến đổi ngược* (ký hiệu bởi toán tử $\mathcal{F}^{-1}$):

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{5.7}$$

được gọi là *biến đổi Fourier ngược* của $F(\omega)$.

Sử dụng các ký hiệu toán tử $\mathcal{F}$ và $\mathcal{F}^{-1}$ ta viết lại được cặp biến đổi Fourier dưới dạng:

$$F(\omega)=\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}, \tag{5.8}$$

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\}. \tag{5.9}$$

Các công thức (5.6) và (5.7) được áp dụng cho cặp biến đổi Fourier trong không gian một chiều từ không gian cấu hình *x* sang không gian ảnh *ω*. Một cách tương tự, ta có thể chuyển cặp biến đổi Fourier ở trên sang không gian ba chiều ($\vec{k}-\vec{r}$) như sau:

$$F(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}d^3\vec{r}\ , \tag{5.10}$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k}\,. \qquad (5.11)$$

Các tích phân trên được lấy trên toàn miền không gian khảo sát. Phương trình (5.11) có thể được xem như là khai triển hàm *f*($\vec{r}$) theo các hàm riêng của sóng phẳng $\exp(i\vec{k}\vec{r})$ có biên độ $F(\vec{k})$.

5.2.2. Biến đổi Fourier sin và cosin

Trong trường hợp nếu $f(x)$ là hàm chẵn hoặc hàm lẻ thì phép biến đổi Fourier ở trên có thể được đưa về thành các *biến đổi Fourier cosin* hoặc *biến đổi Fourier sin* tương ứng.

Sử dụng công thức Euler ta viết lại (5.6) dưới dạng lượng giác:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\cos\omega x + i\sin\omega x\right]dx. \qquad (5.12)$$

Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $f(x)\sin x$ là hàm lẻ theo biến *x*, nên:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x dx = 0.$$

Lúc đó, ảnh Fourier của hàm $f(x)$ được biến đổi đưa về dạng:

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_c(x)\cos\omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f_c(x)\cos\omega x dx\,. \qquad (5.13)$$

Vì vậy:

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega x d\omega\,. \qquad (5.14)$$

Các công thức (5.13) và (5.14) được gọi là cặp *biến đổi Fourier cosin* lẫn nhau, trong đó ta viết thêm chỉ số *c* ở phía dưới để chỉ rõ là biến đổi Fourier cosin.

Hoàn toàn tương tự, nếu *f(x)* là hàm lẻ thì (5.6) và (5.7) trở thành cặp *biến đổi Fourier sin* như sau:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_s(x) \sin \omega x dx, \tag{5.15}$$

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega. \tag{5.16}$$

Trong đó, ta dùng chỉ số *s* ở phía dưới để biểu thị biến đổi Fourier sin.

5.2.3. Biến đổi Fourier của đạo hàm

Sử dụng công thức (5.6), ta tính trực tiếp ảnh Fourier của đạo hàm như sau:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{-i\omega x} dx = \frac{e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

$$-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \tag{5.17}$$

Giả sử rằng $f(x)$ triệt tiêu khi $|x| \to \infty$, ta được:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = \mathcal{F}\left\{f'\right\} = -i\omega \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = (-i\omega) F(\omega). \tag{5.18}$$

Từ (5.18) cho thấy, biến đổi Fourier của đạo hàm bậc nhất bằng ảnh của hàm gốc ban đầu nhân với (- $i\omega$). Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được ảnh Fourier của đạo hàm cấp *n* như sau:

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (-i\omega)^n \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = (-i\omega)^n F(\omega). \tag{5.19}$$

Hệ thức (5.19) cho thấy: *trong không gian ảnh thì toán tử đạo hàm cấp n được thay bằng* $(-i\omega)^n$. Đây là tính chất quan trọng và cũng chính là ưu điểm khi áp dụng biến đổi Fourier vào giải phương trình vi phân. Lúc đó, phương trình vi phân trong không gian cấu hình sẽ được thay thế bởi phương trình đại số trong không gian ảnh nên có thể giải một cách dễ dàng hơn.

5.2.4. Biến đổi Fourier của tích chập

Người ta định nghĩa tích chập $(f * g)(x)$ như sau [3, 16]:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) g(x-p) dp . \qquad (5.20)$$

Áp dụng biến đổi Fourier (5.6) lên biểu thức này và thực hiện tính tích phân vế phải ta thu được:

$$\mathcal{F}\{f * g(x)\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\} = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega) . \qquad (5.21)$$

Thực hiện biến đổi ngược:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G(\omega)e^{-i\omega x} d\omega . \qquad (5.22)$$

Các công thức này sẽ có nhiều ứng dụng khi giải phương trình đạo hàm riêng hoặc phương trình tích phân được biểu diễn theo các tích chập.

5.2.5. Biến đổi Fourier của hàm thực

Giả sử ta có hàm thực $f(x)$ và ký hiệu $f^*(x)$ là liên hợp phức của $f(x)$. Thực hiện biến đổi ngược của $f(x)$ và $f^*(x)$ theo định nghĩa (5.6) ta được:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega; \quad f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{-i\omega x} d\omega . \qquad (5.23)$$

Mặt khác, do $f(x)$ là hàm thực nên $f^*(x) \equiv f(x)$. Thay vào (5.23), ta có:

$$F(\omega) = F^*(-\omega) . \qquad (5.24)$$

5.2.6. Hệ thức Parseval

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ tương ứng có các ảnh Fourier là $F(\omega)$ và $G(\omega)$,hệ thức Parseval phát biểu rằng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega , \qquad (5.25)$$

trong đó, $g^*(x)$ và $G^*(\omega)$ tương ứng là liên hợp phức của $g(x)$ và $G(\omega)$.

Đặc biệt, nếu $f(x) \equiv g(x)$ thì lúc đó:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega ,$$

hay:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega. \tag{5.26}$$

Biểu thức (5.26) cho ta kết luận: *nếu một hàm gốc được chuẩn hoá* (tích phân của bình phương hàm gốc trong không gian cấu hình bằng đơn vị) *thì ảnh Fourier của nó cũng được chuẩn hoá* (tích phân của bình phương hàm ảnh trong không gian ảnh cũng bằng đơn vị). Hệ thức này thường được sử dụng (đặc biệt là trong cơ học lượng tử) để đoán nhận các ý nghĩa vật lí của hàm ảnh khi ta đã biết ý nghĩa vật lí của hàm gốc.

5.2.7. Tịnh tiến hàm gốc

Giả sử hàm gốc $f(x)$ được được tịnh tiến *a* đơn vị theo chiều dương của trục *x*, ta được hàm $f(x-a)$. Vận dụng công thức (5.6) ta xét ảnh Fourier của hàm $f(x-a)$:

$$\mathcal{F}\left\{ f(x-a) \right\} = e^{-i\omega a} \mathcal{F}\left\{ f(x) \right\} = e^{-i\omega a} F(\omega) . \tag{5.27}$$

Như vậy, *khi hàm gốc được tịnh tiến theo chiều dương a đơn vị thì ảnh Fourier của nó sẽ thay đổi ứng với một hệ số nhân* $e^{-i\omega a}$.

5.2.8. Một số ví dụ của biến đổi Fourier

Ví dụ 5.1: *Tìm ảnh Fourier của hàm Gauss.*

Xét hàm $f(x)$ phân bố có dạng Gauss đã được chuẩn hoá:

$$f(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} \right). \tag{5.28.a}$$

Khi đó, áp dụng (5.6) ta thu được ảnh Fourier của $f(x)$ là:

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{a}}{\pi^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{a^2 \omega^2}{2} \right). \tag{5.28.b}$$

Như vậy, *ảnh Fourier của hàm dạng Gauss cũng là hàm có dạng Gauss. Hơn nữa, nếu độ rộng của hàm gốc càng nhỏ* (*tức là giá trị của a càng bé*) *thì độ rộng của hàm ảnh càng lớn*.

Ví dụ 5.2: *Tìm ảnh Fouriercủa hàm delta Dirac*

Ta nhắc lại một tính chất quan trọng của hàm delta δ(*x*-*a*) là [14, 17]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a). \tag{5.29}$$

Do đó, áp dụng (5.6) và sử dụng tính chất (5.29) ta có ảnh Fourier của hàm δ (*x*) là:

$$\mathcal{F}\left\{\delta(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{5.30}$$

5.3. Một số ứng dụng của biến đổi Fourier

Trong mục này ta xét ví dụ về ứng dụng biến đổi Fourier để giải các phương trình đạo hàm riêng. Đối với các phương trình vi phân thường ta có thể áp dụng để giải một cách tương tự (chi tiết có thể tham khảo thêm ở các tài liệu [3, 15, 18]).

Xét phương trình sóng một chiều

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (-\infty<x<+\infty) \tag{5.31}$$

với các điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = f(x);\ u_t(x, 0) = 0. \tag{5.32}$$

Giả thiết hàm sóng $u(x,t)$ triệt tiêu khi x tiến tới vô cùng, các hàm $f(x)$ và $u(x, t)$ có ảnh Fourier tương ứng là $F(\omega)$ và $U(\omega, t)$.

Áp dụng biến đổi Fourier theo biến x lên hai vế phương trình sóng (5.31) đồng thời sử dụng (5.19) ta được:

$$\mathcal{F}\left\{u_{tt}(x,t)\right\} = a^2\mathcal{F}\left\{u_{xx}(x,t)\right\} = a^2(-i\omega)^2U(\omega,t).$$

Trong đó, chỉ số phía dưới biểu thị lấy đạo hàm của hàm u theo chỉ số đó, U là ảnh Fourier của u. Phương trình này được viết lại dạng:

$$U_{tt} + a^2\omega^2 U = 0. \tag{5.33}$$

Trong (5.33), ta xem ω là tham số, con t là biến số. Lúc đó ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát:

$$U(\omega, t) = A(\omega)\cos a\omega t + B(\omega)\sin a\omega t. \tag{5.34}$$

Từ điều kiện ban đầu (5.32), ta có:

$$U(\omega, 0) = A(\omega) = F(\omega),\ U_t(\omega, 0) = a\omega B(\omega) = 0.$$

Do đó:

$$U(\omega, t) = F(\omega)\cos a\omega t. \tag{5.35}$$

Để tìm nghiệm $u(x, t)$ ta thực hiện biến đổi Fourier ngược. Trước hết, ta biểu diễn $\cos a\omega t$ theo công thức Euler để sử dụng công thức tịnh tiến hàm gốc (5.27):

$$U(\omega, t) = F(\omega)\cos a\omega t = \frac{1}{2}F(\omega)\left(e^{i\omega at} + e^{-i\omega at}\right). \tag{5.36}$$

Do đó, áp dụng công thức (2.27) về dịch chuyển hàm gốc, ta dễ dàng suy ra được hàm cần tìm là:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]. \tag{5.37}$$

Đây chính là nghiệm D'Alembert của bài toán truyền sóng với vận tốc ban đầu bằng không mà ta đã biết trong chương 3.

5.4. Biến đổi Laplace

5.4.1. Định nghĩa

Cho $f(t)$ là hàm số xác định với mọi $t \geq 0$. *Biến đổi Laplace* (ký hiệu bằng toán tử $\mathcal{L}$) của hàm $f(t)$ là hàm $F(s)$, được xác định bởi tích phân sau đây [3, 15, 18]:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt,\ s > 0. \tag{5.38a}$$

Hàm $F(s)$ được gọi là *ảnh* của $f(t)$ qua *phép biến đổi Laplace*, còn $f(t)$ được gọi là *hàm gốc* hoặc *biến đổi Laplace ngược* của hàm $F(s)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}. \tag{5.38b}$$

5.4.2. Một số ví dụ về biến đổi Laplace của các hàm đơn giản

Ví dụ 5.3: Tìm ảnh Laplace của $f(t) = 1$.

Ta có: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ với $s > 0$ (do $s \leq 0$ thì tích phân sẽ phân kỳ). Vậy:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \text{ với } s > 0. \tag{5.39}$$

Ví dụ 5.4: Tìm ảnh Laplace của hàm Delta Dirac δ(t-a). Ta có:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-as}, (a > 0). \tag{5.40}$$

Ví dụ 5.5: Tìm ảnh Laplace của $f(t) = e^{at}$. Ta có:

$$\mathcal{L}\{e^{at})\} = \frac{1}{s-a}, (s > a). \tag{5.41}$$

Ví dụ 5.6: Tìm ảnh Laplace của $\sin\omega t$ và $\cos\omega t$. Ta có:

Bằng cách áp dụng định nghĩa (5.38) ta có thể tìm trực tiếp $\mathcal{L}\{\sin\omega t\}$ và $\mathcal{L}\{\cos\omega t\}$. Tuy nhiên, ở đây ta dùng thủ thuật biến đổi dựa theo công thức Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t. \tag{5.42}$$

Vì vậy:

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = \mathcal{L}\{\cos\omega t\} + i\,\mathcal{L}\{\sin\omega t\}. \tag{5.43}$$

Mặt khác, theo (5.41) ta có:

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t})\} = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \tag{5.44}$$

So sánh giữa các phần thực và giữa các phần ảo của (5.43) tương ứng với (5.44), ta được:

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \tag{5.45}$$

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \tag{5.46}$$

Ví dụ 5.7: Tìm ảnh Laplace của $f(t) = \text{ch}at$ và $f(t) = \text{sh}at$.

Ta có:

$$\mathcal{L}\{\text{ch}at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad (s>a) \tag{5.47}$$

Tương tự ta có:

$$\mathcal{L}\{\text{sh}at\} = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad (s>a). \tag{5.48}$$

Ví dụ 5.8: Tìm hàm gốc (biến đổi ngược $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$) của hàm ảnh:

$$F(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}, a \neq b.$$

Trước hết, ta phân tích $F(s)$ thành các phân thức đơn giản:

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right). \tag{5.49}$$

Vì vậy:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{a-b}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s-a}\right\} - \frac{1}{a-b}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{s-b}\right\} = \frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt}). \tag{5.50}$$

5.4.3. Biến đổi Laplace của đạo hàm

Giả sử $f(t)$ có ảnh Laplace là $F(s)$, khi đó ảnh Laplace của $f'(t)$ là:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0). \tag{5.51}$$

Thật vậy, xét trường hợp $f'(t)$ liên tục trên $[0, +\infty)$. Khi đó, sử dụng tích phân từng phần ta được:

$$\mathcal{L}\left\{f^{'}(t)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = (e^{-st} f(t))\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$= sF(s) - f(0).$$

Bằng phép quy nạp ta dễ dàng chứng minh được biến đổi Laplace của đạo hàm cấp *n* như sau:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{'}(0) - ... - f^{(n-1)}(0), \quad (5.52)$$

trong đó $f^{'}(t),..., f^{(n-1)}(t)$ là các hàm liên tục trên [0, +∞) và có cấp mũ α, còn $f^{(n)}(t)$ liên tục từng khúc trên mọi đoạn con hữu hạn của [0, +∞). Một trong những công thức quan trọng là biến đổi Laplace của vi phân cấp 2:

$$\mathcal{L}\left\{f^{''}(t)\right\} = s^2 F(s) - sf(0) - f^{'}(0). \quad (5.53)$$

Các công thức (5.15) - (5.53) rất có ích khi áp dụng biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân. Lúc đó, các toán tử vi phân được chuyển thành các phép nhân đại số trong không gian ảnh (xem mục 5.5).

5.4.4. Biến đổi Laplace của tích phân

Giả sử $f(t)$ có ảnh Laplace là *F*(*s*), lúc đó, ảnh Laplace của tích phân của *f*(*t*) là:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r)dr\right\} = \frac{1}{s} \mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s). \quad (5.54)$$

Từ đó, ta suy ra công thức của phép biến đổi ngược:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(r)dr. \quad (5.55)$$

Việc chứng minh tính chất này khá đơn giản, chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra từ định nghĩa. Biểu thức (5.55) được ứng dụng để tính các tích phân xác định nếu ta biến đổi ngược của ảnh Laplace chia cho *s*, tức là $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}$, tìm được dễ dàng.

5.4.5. Đạo hàm của ảnh Laplace

Giả sử $F(s)$ là ảnh Laplace của $f(t)$ và có đạo hàm đến cấp n, ta có:

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\left\{(-1)^n t^n f(t)\right\}, n = 0, 1, 2, ... \qquad (5.56)$$

Ta chứng minh biểu thức (5.56) bằng phép quy nạp. Thật vậy, do $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ nên với $k = n = 1$, ta tính $F'(s)$ bằng cách đạo hàm biểu thức này qua dấu tích phân:

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} te^{-st} f(t)dt = \mathcal{L}\left\{(-1)^1 tf(t)\right\}. \qquad (5.57)$$

Vì biểu thức (5.56) đúng với $n = 1$ nên giả sử nó đúng với mọi $k = n$. Lúc đó, ta cần chứng minh (5.56) đúng với $k = n+1$, tức là:

$$F^{(n+1)}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} e^{-st} f(t)dt = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} \left(\frac{de^{-st}}{ds}\right) f(t)dt = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} \left(e^{-st}(-1)^n t^n f(t)\right)dt =$$

$$= -\int_0^{+\infty} \left(e^{-st}(-1)^n t^{n+1} f(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} \left(e^{-st}(-1)^{n+1} t^{n+1} f(t)\right)dt$$

$$F^{(n+1)}(s) = \mathcal{L}\left\{(-1)^{n+1} t^{n+1} f(t)\right\}. \qquad (5.58)$$

Vì đẳng thức trên đúng với $k = n + 1$ nên nó sẽ đúng với mọi n.

Ví dụ 5.9: Tìm $\mathcal{L}\left\{t^n\right\}$. Ta có:

Vì $\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \mathcal{L}\left\{t^n.1\right\}$, nên theo (5.56) ta rút ra được:

$$\mathcal{L}\left\{t^n.f\right\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ ở đây } F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}.$$

Từ đó:

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Vì vậy:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \mathcal{L}\left\{t^n.f\right\} = (-1)^n F^{(n)}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \qquad (5.59)$$

5.4.6. Tích phân của ảnh Laplace

Gọi $F(s)$ là ảnh Laplace của hàm $f(t)$ và giả thiết $\frac{f(t)}{t}$ tồn tại biến đổi Laplace. Thực hiện lấy tích phân hai vế của biến đổi Laplace trong (5.38), ta có:

$$\int_s^{+\infty} F(u)du = \int_s^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t)dt\right)du.$$

Đổi thứ tự lấy tích phân và tiến hành tích phân theo biến u ta được:

$$\int_s^{+\infty} F(u)du = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_s^{+\infty} e^{-ut}du\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Vậy, tích phân của hàm ảnh $F(s)$ được xác định:

$$\int_s^{+\infty} F(u)du = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}. \qquad (5.60)$$

5.4.7. Dịch chuyển ảnh

Chúng ta biết rằng, khi hàm $F(s)$ dịch chuyển a đơn vị theo chiều dương của trục s ta được hàm $F(s - a)$. Lúc đó, để xem xét sự thay đổi của hàm gốc ta áp dụng định nghĩa của biến đổi Laplace nhưng thay s bởi $(s - a)$:

$$F(s-a) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}[e^{at} f(t)]dt. \qquad (5.61)$$

Từ (5.61) ta có:

$$F(s-a) = \mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\}, \qquad (5.62)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at} f(t). \qquad (5.63)$$

Như vậy, *nếu hàm ảnh dịch chuyển theo chiều dương a đơn vị thì hàm gốc tương tương của nó được nhân với* e^{at} *so với hàm gốc ban* *đầu khi ảnh chưa dịch chuyển*. Công thức này rất tiện lợi cho tìm ảnh Laplace của các hàm khi chúng được biểu diễn như là tích của e^{at} với một hàm đơn giản nào đó.

Ví dụ 5.10: Tìm $\mathcal{L}\{e^{at}\sin\omega t\}$. Ta có:

Do $\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ nên:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin\omega t\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}. \tag{5.64}$$

Tương tự:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos\omega t\} = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}. \tag{5.65}$$

5.4.8. Dịch chuyển hàm gốc

Khi hàm gốc $f(t)$ dịch chuyển theo chiều dương trục hoành một đoạn là a ta được hàm $f(t-a)$. Chúng ta xem xét sự thay đổi ảnh Laplace $F(s)$ của hàm $f(t)$ ứng với phép dịch chuyển này. Trước hết, do hàm gốc $f(t)$ trong biến đổi Laplace xác định với $t \geq 0$ nên $f(t - a)$ chỉ xác định với $t \geq a$. Vì vậy, để ảnh của phép chuyển dịch hàm $f(t)$ vẫn có ý nghĩa ta cần dịch chuyển $f(t)$ theo nghĩa sau [3,15, 18]:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 \quad , & t < a, \\ f(t-a)\,, & t > a. \end{cases} \tag{5.66}$$

Người ta định nghĩa *hàm bước nhảy đơn vị* $u(t-a)$ như sau:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 \quad , & t < a, \\ 1 \quad , & t > a. \end{cases} \tag{5.67}$$

Khi đó, hàm $f(t - a)u(t - a)$ chính là hàm chuyển dịch $\tilde{f}(t)$ mà ta cần xây dựng ở (5.66). Để tìm sự thay đổi của hàm ảnh ứng với dịch chuyển của hàm gốc chúng ta vận dụng biểu thức định nghĩa (5.38). Dễ thấy:

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s(r+a)} f(r)dr = \int_0^a 0dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)dt \quad (\text{đặt } t = r + a).$$

Ta có mở rộng thêm miền lấy tích phân [0, a] để được tích phân trên khoảng [0, +∞). Khi đó, chỉ cần thay $f(t - a)$ bởi $f(t - a)u(t - a)$ ta được:

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt = \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}.$$

Từ đây ta có:

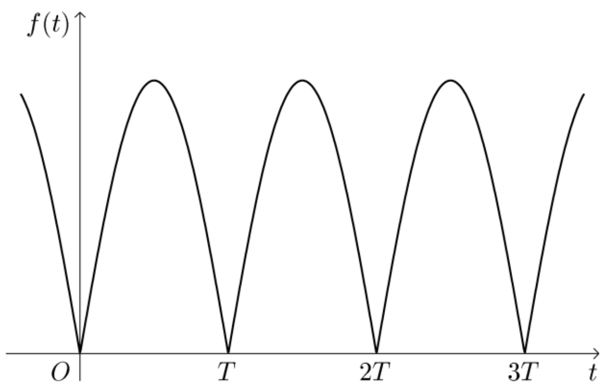
$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s). \tag{5.68}$$

Như vậy, *khi hàm gốc dịch chuyển a đơn vị theo chiều dương thì hàm ảnh thay đổi một thừa số nhân* e^{-as}.

5.4.9. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn

Giả sử hàm $f(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T được minh họa như trên hình 5.2. Giả thiết $f(t)$ thoả mãn điều kiện tồn tại biến đổi Laplace. Gọi $F_1(s)$ là ảnh Laplace của $f(t)$ trong chu kì [0, T]:

$$F_1(s) = \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt. \tag{5.69}$$



Hình 5.2. Minh họa hàm tuần hoàn có chu kì T.

Lúc đó, ảnh Laplace $F(s)$ của $f(t)$ trong miền [0, ∞] liên hệ với $F_1(s)$ bởi hệ thức:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-sT}} F_1(s)\,. \qquad (5.70)$$

Chứng minh: Phân tích $F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ rồi thực hiện đổi biến $\tau = t- T$ ở tích phân thứ haita được:

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+T)} f(\tau+T)d\tau = e^{-sT}\int_0^{\infty} e^{-sr} f(r)dr = e^{-sT}F(s)$$

.

Từ đây ta rút ra được hệ thức (5.70).

Ví dụ 5.11:

a) Tìm Biến đổi Laplace của *u(t-a)*. Ta có:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-as}}{s}\,. \qquad (5.71)$$

b) Tìm biến đổi Laplace của *f*(*t*), biết:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi, \\ 0, & \pi < t < 2\pi \\ 3\sin t\,, & 2\pi < t < +\infty. \end{cases}$$

Ta có: trước hết ta dùng hàm bước nhảy đơn vị để biểu diễn lại *f*(*t*). Dễ kiểm tra được:

$$f(t) = 2u(t) - 2u(t-\pi) + 3u(t-2\pi)\sin t.$$

Nhưng do hàm sin*t* = sin(*t* – 2π), nên:

$$f(t) = 2u(t) - 2\,u(t-\pi) + 3u(t-2\pi)\sin(t-2\pi).$$

Vì vậy ta có:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s} + 3\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

5.4.10. Biến đổi Laplace của tích chập

Giả sử *f*(*t*) và *g*(*t*) có các hàm ảnh tương ứng là *F*(*s*) và *G*(*s*), người ta định nghĩa tích chập bởi [3, 15, 18]:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(r)g(t-r)dr. \qquad (5.72)$$

Lúc đó:

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sr} f(r)drG(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sr} G(s) f(r)dr\,. \qquad (5.73)$$

Mặt khác:

$$e^{-sr}G(s) = \mathcal{L}\{g(t-r)u(t-r)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-r)u(t-r)dt$$

$$= \int_r^{+\infty} e^{-st} g(t-r)dt. \qquad (5.74)$$

Thay (5.74) vào biểu thức (5.73), ta được:

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} f(r)\left(\int_r^{+\infty} e^{-st} g(t-r)dt \right) dr.$$

Đổi thứ tự lấy tích phân, ta có:

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^t f(r)g(t-r)dr \right) dt = \mathcal{L}\{ f*g(t)\}\,, \qquad (5.75)$$

hay

$$(f*g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}\,. \qquad (5.76)$$

Trong thực tế, đôi khi ta gặp biến đổi Laplace của tích chập. Chẳng hạn, xét bài toán dao động cưỡng bức với các điều kiện đầu bằng không:

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad \text{với } \; y(0) = 0, y'(0) = y' = 0. \qquad (5.77)$$

Áp dụng biến đổi Laplace hai vế (5.77) ta được phương trình ảnh:

$$Y(s) = R(s)Q(s), \qquad (5.78)$$

trong đó:

$$R(s) = \mathcal{L}\{r\}, Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}. \qquad (5.79)$$

Thực hiện biến đổi ngược của (5.78) ta được:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)/Q(s)\},$$

hay

$$y(t) = (r*q)(t) = \int_0^t r(v)q(t-v)dv, \qquad (5.80)$$

trong đó $q(t)$ là gốc của $Q(s)$.

Như vậy, để tìm nghiệm của bài toán này ta phải tìm gốc của tích hai hàm ảnh (còn gọi là *nghịch ảnh* của tích hai hàm) mà các hàm gốc của chúng được biểu diễn dưới dạng tích chập (5.80).

5.5. Một số ứng dụng của biến đổi Laplace

5.5.1. Giải phương trình vi phân thường

Bây giờ ta xét ứng dụng của phép biến đổi Laplace để giải các *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, không thuần nhất* và có *hệ số là hằng số*:

$$y'' + ay' + by = r(t), \qquad y(0) = y_0, y'(0) = y_0'. \qquad (5.81)$$

Trong thực tế, nhiều bài toán vật lí được đưa về dạng phương trình vi phân cấp hai như (5.81), ví dụ như *dao động cơ học tắt dần chịu tác dụng của ngoại lực, dao động điện từ trong mạch RLC*… Lúc đó, vế phải của (5.81) thường đóng vai trò là các "*nguồn*" (bao gồm ngoại lực, nguồn điện…). Đặc biệt, có những trường hợp trong đó $r(t)$ đóng vai trò là các *hàm xung* (ví dụ hàm bước nhảy, hàm delta Dirac, v.v). Trong những trường hợp như vậy, giải bằng phương pháp dùng biến đổi Laplace sẽ rất thuận lợi. Ta minh họa quy trình giải phương trình (5.81) bằng phép biến đổi Laplace theo ba bước sau:

Bước 1: *Chuyển bài toán sang không gian ảnh*.

Áp dụng biến đổi Laplace lên hai vế của (5.81) đồng thời sử dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm (5.52), ta được *phương trình ảnh*:

$$[s^2Y(s) - sy_0 - y_0'] + a[sY(s) - y_0] + bY(s) = R(s), \quad (5.82)$$

trong đó

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}, R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}. \quad (5.83)$$

Bước 2: *Giải tìm nghiệm trong không gian ảnh.*

Ta viết lại phương trình ảnh dưới dạng:

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y_o + y_o' + R(s). \quad (5.84)$$

Đặt:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}. \quad (5.85)$$

Khi đó, phương trình ảnh (5.84) cho ta nghiệm trong không gian ảnh:

$$Y(s) = [(s + a)y_o + y_o']\, Q(s) + R(s)Q(s). \quad (5.86)$$

Nếu có thêm điều kiện $y_o = 0$, $y_o' = 0$ ta có có thể biến đổi (5.86) thành:

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\mathcal{L}\{\text{output}\}}{\mathcal{L}\{\text{input}\}},$$

hay

$$\mathcal{L}\{\text{output}\} = Q(s)\mathcal{L}\{\text{input}\}. \quad (5.87)$$

Theo lý thuyết điều khiển, $r(t)$ là *đầu vào* (tác động ngoài lên hệ), $y(t)$ là *đầu ra* của hệ nên từ (5.87) ta thấy $Q(s)$ đóng vai trò là *hàm truyền*, tức là "*truyền*" từ đầu vào sang đầu ra. Mặt khác, theo (5.85) thì *hàm truyền* chỉ phụ thuộc vào a và b tức là *phụ thuộc vào cấu trúc của hệ* [3, 18].

Bước 3: *Biến đổi ngược để tìm nghiệm.*

Từ biểu thức nghiệm trong không gian ảnh (5.86), ta thực hiện phép biến đổi ngược để tìm nghiệm của bài toán:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}. \quad (5.88)$$

Cần chú ý rằng, vế phải của (5.86) là tổng của hai số hạng, mỗi số hạng biểu diễn dưới dạng tích của hai hàm, trong đó có một hàm là

$Q(s)$ biểu diễn dưới dạng phân thức (5.85). Tùy theo dạng của $R(s)$, ta có thể phân tách $Y(s)$ thành các phân thức đơn giản dễ tìm biến đổi ngược hơn. Xét một số trường hợp sau [15, 18]:

- Khi $R(s)$ có dạng $as + b$ (a và b là các hằng số) thì $Y(s)$ có thể đưa được về dạng:

$$\frac{A}{as+b} \text{ (với } A \text{ là hằng số);}$$

- Khi $R(s)$ có dạng $(as + b)^n$ thì $Y(s)$ có thể đưa được về dạng:

$$\frac{A_1}{as+b}+\frac{A_2}{(as+b)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(as+b)^n} \text{ (với } A_1, A_2, \ldots A_n \text{ là các hằng số);}$$

- Khi $R(s)$ có dạng $as^2 + bs + c$ thì $Y(s)$ có thể đưa được về dạng:

$$\frac{As+B}{as^2+bs+c} \text{ (với } A \text{ và } B \text{ là các hằng số);}$$

- Khi $R(s)$ có dạng $(as^2 + bs + c)^n$ thì $Y(s)$ có thể đưa được về dạng:

$$\frac{A_1s+B_1}{as^2+bs+c}+\frac{A_2s+B_2}{(as^2+bs+c)^2}+\ldots+\frac{A_ns+B_n}{(as^2+bs+c)^n}$$

(với $A_1,\ldots A_n$ và $B_1,\ldots B_n$ là các hằng số);

Trong trường hợp chung, việc tìm biến đổi ngược theo (5.88) tương đối khó khăn và thường phải dùng một số thủ thuật đặc biệt. Dưới đây, chúng ta xét ví dụ đơn giản.

Ví dụ 5.12: Dùng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân

$$y''(t)+y(t)=1, \tag{5.89}$$

thỏa mãn các điều kiện đầu:

$$y'(0)=y(0)=0. \tag{5.90}$$

Bước 1: Áp biến đổi Laplace lên hai vế của (5.89) đồng thời sử dụng (5.52) ta đưa về được phương trình ảnh:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}+\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{1\},$$

hay

$$[s^2Y(s) - sy_0 - y_0'] + Y(s) = \frac{1}{s}. \qquad (5.91)$$

Bước 2: Giải tìm nghiệm trong không gian ảnh.

Thay điều kiện đầu (5.90) vào (5.91), ta thu được nghiệm trong không gian ảnh:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}. \qquad (5.92)$$

Bước 3: Biến đổi ngược để tìm nghiệm trong không gian cấu hình.

Thực hiện biến đổi ngược hai vế (5.92), ta có:

$$y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}. \qquad (5.93)$$

Đối chiếu (5.93) với (5.39) và (5.45) ta thu được nghiệm cần tìm:

$$y(t) = 1 - \cos t. \qquad (5.94)$$

5.5.2. Giải phương trình đạo hàm riêng

Biến đổi Laplace có thể được áp dụng để giải các phương trình đạo hàm riêng với các điều kiện biên và điều kiện đầu theo các bước giống như áp dụng giải phương trình vi phân thường trên đây. Để minh họa điều này ta xét bài toán truyền sóng một chiều theo phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ với } 0 \le x \le +\infty, \qquad (5.95)$$

với các điều kiện đầu và điều kiện biên:

$$u(x, 0) = 0;\ u_t^{'}(x,t)\Big|_{t=0} = u_t^{'}(x,0) = 0 \qquad (5.96)$$

$$u(0,\, t) = f(t) = \begin{cases} \sin t \,,\, 0 \le t \le 2\pi \\ 0\,, \quad t \ne [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{5.97}$$

Đây chính là bài toán truyền sóng một chiều nửa vô hạn mà ta đã gặp trong chương 3. Áp biến đổi Laplace lên hai vế của phương trình (5.95) theo biến t ta được phương trình ảnh:

$$s^2U - su(x,\, 0) - u_t^{'}(x, 0) = a^2 \frac{\partial_2 U}{\partial x^2}\,, \tag{5.98}$$

với

$$U = U(x, s) = \mathcal{L}u(x, t)\,.$$

Sử dụng các điều kiện đầu trong (5.96), phương trình (5.98) được biến đổi thành:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{s^2}{a^2} U = 0. \tag{5.99}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$U(x, s) = A(s) e^{\frac{sx}{a}} + B(s) e^{-\frac{sx}{a}}. \tag{5.100}$$

Để tính các hệ số $A(s)$ và $B(s)$ ta cho nghiệm tổng quát (5.100) thoả điều kiện biên (5.97). Từ điều kiện biên đối với hàm gốc $u(x,t)$ ta có điều kiện biên tương ứng cho hàm ảnh $U(x,s)$:

$$U(0,\, s) \equiv \mathcal{L}\,\{u(0,\, t\,)\} = \mathcal{L}\,\{f(t)\} \equiv F(s). \tag{5.101}$$

Giả sử rằng có thể chuyển qua được giới hạn dưới dấu tích phân thì:

$$\lim_{x\to+\infty} U(x, s) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \lim_{x\to+\infty} u(x, t)dt = 0. \tag{5.102}$$

Vì $e^{\frac{sx}{a}} \to +\infty$ khi $x \to +\infty$, nên hệ số $A(s) = 0$. Do đó, nghiệm trong không gian ảnh là:

$$U(x,s) = F(s)\, e^{-\frac{sx}{a}}. \tag{5.103}$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược và sử dụng công thức dịch chuyển hàm gốc ta được nghiệm của bài toán:

$$u(x,t) = f(t-\frac{x}{a})u(t-\frac{x}{a}) = \begin{cases} \sin(t-\frac{x}{a}), \text{ khi } & \frac{x}{a} < t < \frac{x}{a}+2, \\ 0, \qquad\qquad \text{khi } & t \neq (\frac{x}{2}, \ \frac{x}{2}+a). \end{cases} \tag{5.104}$$

5.5.3. Giải phương trình tích phân

Bằng cách sử dụng biến đổi Laplace, ta có thể chuyển các toán tử tích phân trong không gian cấu hình sang phép toán đại số đơn giản trong không gian ảnh. Vì thế, biến đổi Laplace có thể vận dụng để giải các phương trình tích phân, nhất là khi hàm dưới dấu tích phân có dạng tích chập.

Ví dụ 5.13:Tìm nghiệm của phương trình tích phân:

$$y(t) = t + \int_0^t y(r)\sin(t-r)dr. \tag{5.105}$$

Ta dễ nhận thấy, tích phân ở vế phải (5.105) chính là tích chập $y(t)$*sin$t$. Vì vậy:

$$y(t) = t + y(t)*\sin t\,. \tag{5.106}$$

Áp dụng biến đổi Laplace lên hai vế (5.106) ta thu được nghiệm trong không gian ảnh:

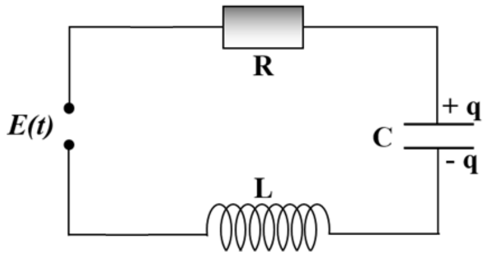
$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}. \tag{5.107}$$

Từ đây, thực hiện biến đổi ngược ta suy ra nghiệm của phương trình tích phân (5.105):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = t + \frac{t^3}{6}. \tag{5.108}$$

5.5.4. Các bài toán về mạch dao động điện từ

Một mạch dao động điện từ cơ bản thường được cấu tạo từ các *điện trở thuần R*, *cuộn cảm* có hệ số tự cảm *L*, *tụ điện* có điện dung *C* và *nguồn điện* có suất điện động $E(t)$ như trên hình 5.3.



Hình 5.3. Mạch dao động điện từ gồm nguồn *E* và các phần tử *R, L, C.*

Theo định luật Ohm thì độ giảm thế qua các phần tử *R, L* và *C* có các giá trị là iR, $L\dfrac{di}{dt}$ và $\dfrac{q}{C}$; trong đó *q* và *i* tương ứng là điện tích trên bản tụ và dòng điện đi qua mạch. Tổng độ giảm thế qua các phần tử này sẽ bằng hiệu điện thế *E* của nguồn. Phương trình dao động của điện tích trên tụ điện là:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t). \qquad (5.109)$$

Để tìm dao động điện *q* theo thời gian ta áp biến đổi Laplace lên hai vế (5.109) đồng thời sử dụng biến đổi Laplace của đạo hàm (5.52), ta thu được phương trình ảnh. Tiếp đến, ta giải tìm nghiệm trong không gian ảnh rồi thực hiện biến đổi ngược để thu được nghiệm trong không gian cấu hình.

Ví dụ 5.14: Cho mạch dao động điện từ được mắc như hình 5.3, với các phần tử *R* = 16 Ω; *C* = 0.02 F; *L* = 2 H. Giả thiết điện tích trên mỗi bản tụ tại thời điểm ban đầu là $q_o = 0$. Tìm biểu thức cường độ dòng điện trong mạch và điện tích trên mỗi bản tụ tại thời điểm $t > 0$ biết nguồn điện có giá trị: $E = 100\sin(3t)$V.

Trước hết, ta tìm phương trình dao động điện từ của mạch điện bằng cách thay giá trị của các phần tử (*R, L, C, E*) vào (5.109):

$$\frac{d^2q}{dt^2}+8\frac{dq}{dt}+25q=50\sin 3t. \qquad (5.110)$$

Để tìm nghiệm của phương trình này thỏa mãn điều kiện đầu $q_o = 0$ ta sử dụng biến đổi Laplace theo 3 bước đã biết.

Bước 1: Thực hiện phép biến đổi Laplace hai vế (5.110) ta thu được phương trình ảnh:

$$\{s^2Q - sq(0) - q'(0)\} + 8\{sQ - q(0)\} + 25Q = 50\frac{3}{s^2+3^2}, \qquad (5.111)$$

trong đó

$$Q = Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\},\ q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}.$$

Bước 2: Tìm nghiệm trong không gian ảnh.

Thay các điều kiện đầu $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$) vào (5.111) ta thu được nghiệm trong không gian ảnh:

$$Q(s) = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}. \qquad (5.112)$$

Bước 3: Biến đổi ngược để tìm nghiệm trong không gian cấu hình.

Để thực hiện điều này ta tách Q(s) trong (5.112) thành các hàm đơn giản (đã biết gốc):

$$Q(s) = \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}. \ (5.113)$$

Khi đó, biến đổi Laplace ngược $Q(s)$ ta được:

$$q(t) = \frac{75}{26}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} - \frac{75}{52}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{75}{26}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+4\right)+9}\right\} +$$
$$+ \frac{75}{52}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{\left(s+4\right)^2+9}\right\}.$$

Sử dụng biến đổi ngược của các hàm sin, cosin và công thức dịch chuyển ảnh ta dễ dàng tìm được hàm gốc:

$$q(t) = \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2\sin 3t)\ \text{[C]}. \quad (5.114)$$

Cường độ dòng điện chạy trong mạch là:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}\left(6\cos 3t + 17\sin 3t\right)[\text{A}]. \quad (5.115)$$

Nhận xét: Nhóm số hạng thứ nhất trong vế phải của (5.114) và (5.115) biểu thị dao động điều hòa với tần số bằng tần số của nguồn điện *E*, nhóm số hạng thứ hai cũng biểu thị dao động điều hòa nhưng có biên độ tắt dần theo quy luật hàm mũ. Vì vậy, sau khoảng thời gian đủ lớn thì dao động điện và cường độ dòng điện sẽ được duy trì theo quy luật:

$$q(t) = \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) \ [\text{C}] \qquad (5.116)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t) \ \ [\text{A}]. \qquad (5.117)$$

Bài toán cơ bản trên đây có thể được mở rộng cho các trường hợp khác nhau của nguồn (nguồn một chiều, nguồn là các xung,...) hoặc cho trường hợp mạch dao động có cấu trúc phức tạp hơn (ví dụ mạch hỗ cảm).

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1. Chứng tỏ rằng các biến đổi Fourier sin và cosin của $f(t) = e^{-at}$ là:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2 + a^2} \quad ; \quad F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2 + a^2}.$$

Từ đó rút ra:

$$\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \quad , \quad x > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-ax} \quad , \quad x > 0.$$

5.2. Tìm biến đổi Fourier của $f(x) = e^{-a|x|}$.

5.3. Một xung hình chữ nhật được mô tả bởi $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le a \\ 0 & , \quad |x| > a \end{cases}$.

a) Chứng tỏ rằng biến đổi Fourier của $f(x)$ là

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega} \quad .$$

b) Sử dụng đẳng thức Parseval, hãy tính $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

5.4. Cho $F(\omega)$ và $G(\omega)$ tương ứng là ảnh Fourier của $f(x)$ và $g(x)$. Chứng tỏ rằng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega.$$

Vì vậy, nếu $g(x)$ là một gần đúng của phép đo $f(x)$ thì trung bình của bình phương độ lệch trong không gian cấu hình sẽ bằng trung bình của bình phương độ lệch trong không gian Fourier.

5.6. Sử dụng đẳng thức Parseval hãy tính:

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}$; b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega^2 + a^2)^4}$.

5.6. Giải bài toán truyền nhiệt một chiều trên thanh dài vô hạn bằng biến đổi Fourier. Biết $u(x, t) \to 0$ và $u_x(x, t) \to 0$ khi $|x| \to \infty$, $u(x, 0) = f(x)$.

5.7. Sử dụng biến đổi Laplace của đạo hàm chứng minh các công thức sau:

a) $\mathcal{L}(t\cos\omega t) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$;

b) $\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$.

c) $\mathcal{L}(t\text{ch}\omega t) = \frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$;

d) $\mathcal{L}(t\text{sh}\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$.

e) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$;

f) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$.

5.8. Tìm biến đổi ngược (nghịch ảnh) của các hàm sau:

a) $\frac{\pi}{(s + \pi)^2}$; b) $\frac{s - 2}{s^2 - 4s + 5}$;

c) $\frac{s}{(s + 3)^2 + 1}$; d) $\frac{6}{s^2 - 4s - 5}$;

e) $\frac{1}{(s - 1)^2}$; f) $\frac{1}{s^2(s - 3)}$;

g) $\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$; h) $\frac{s^2 - a^2}{(s + a^2)^2}$.

5.9. Dùng biến đổi Laplace giải bài toán Cauchy:

a) $y'' + y = 3,\qquad y(0) = 0, y'(0) = 1;$

b) $y'' - y = te^t,\qquad y(0) = 1, y'(0) = 1;$

c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{-2t},\qquad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2;$

d) $y'' + 4y = H(t - 1),\qquad y(0) = 0, y'(0) = 0;$

e) $y'' + 4y = r(t),\qquad y(0) = 0, y'(0) = 3,$

với

$$r(t) = \begin{cases} 3\sin t, & 0 < t < \pi, \\ -3\sin t, & t > \pi. \end{cases}$$

5.10. Giải các phương trình tích phân:

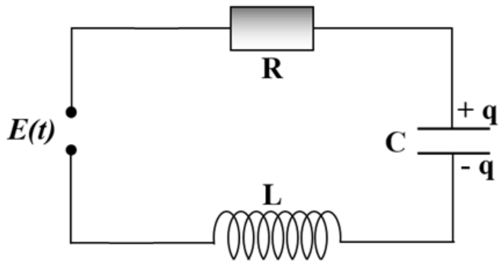
$$\text{a) } y(t) = 1 + \int_0^t y(r)\cos(t - r)dr;$$

$$\text{b) } y(t) = te^t - 2e^t \int_0^t e^{-r} y(r)dr;$$

$$\text{c) } y(t) = 5 + \int_0^t (t - r)y(r)dr.$$

5.11. Một tụ điện có điện dung C được nạp điện điện lượng q_0. Tại thời điểm $t = 0$, người ta mắc nó vào hai đầu của một cuộn dây có hệ số tự cảm L. Dùng biến đổi Laplace, tìm điện tích $q(t)$ của tụ điện và cường độ của dòng điện trong mạch tại thời điểm $t > 0$?

5.12. Cho mạch dao động điện từ được mắc như hình 5.4. Biết, $R = 50\ \Omega$; $C = 0.001$ F; $L = 1$H. Giả thiết điện tích trên mỗi bản tụ tại thời điểm ban đầu là $q_o = 0$. Tìm biểu thức cường độ dòng điện trong mạch và điện tích trên mỗi bản tụ tại thời điểm $t > 0$.Biết nguồn điện được biểu diễn dưới dạng: $E(t) = 220\sin(100\pi t)$V.



Hình 5.4. Mạch dao động điện từ.

5.13. Một vật nhỏ có khối lượng *m* được gắn vào đầu một lò xo có độ cứng *k*. Đầu còn lại của lò xo được treo cho dao động theo phương thẳng đứng. Biết rằng lực cản của môi trường tỉ lệ bậc nhất với vận tốc của vật với hệ số tỷ lệ là γ. Giả sử rằng trọng lực không đổi trong phạm vi không gian khảo sát.

a) Thiết lập phương trình dao động của vật.

b) Tìm li độ dao động của vật tại thời điểm *t* bất kỳ bằng phép biến đổi Laplace.

Chương 6

PHƯƠNG PHÁP SỐ VÀ MÔ HÌNH HÓA SỐ LIỆU

6.1. Mở đầu

Khi khảo sát các bài toán vật lí, đôi khi chúng ta gặp các trường hợp phức tạp rất khó tìm nghiệm chính xác. Các bài toán này thường được mô tả bởi các phương trình vi phân hoặc tích phân. Khi đó, chúng ta thường phải chấp nhận tìm *nghiệm gần đúng* dưới dạng giải tích hoặc dạng số. Nghiệm gần đúng dạng giải tích cho ta bức tranh về sự thay đổi liên tục của đại lượng được khảo sát theo các tham số của bài toán nhưng nhìn chung phương pháp tìm nghiệm theo cách này chỉ áp dụng được trong một số trường hợp nhất định. Vì vậy, thông dụng nhất trong tìm nghiệm gần đúng là sử dụng *phương pháp số*. Đặc biệt, sự phát triển của công nghệ máy tính với tốc độ xử lí tới hàng triệu phép tính trong một giây đã cho phép tăng độ chính xác lên rất nhiều. Hiện nay, các phương pháp số kết hợp với máy tính trở thành công cụ chính của ngành vật lí tính toán.

Ngoài việc sử dụng các phương pháp số, trong thực nghiệm chúng ta thường thu thập số liệu của các phép đo dưới dạng tập hợp các giá trị/điểm rời rạc (có khi tới hàng nghìn điểm). Khi đó, việc biểu diễn tập hợp số liệu đó theo một biểu thức/phương trình toán học đơn giản nhưng mang đầy đủ thông tin của trường số liệu là rất quan trọng và được gọi là sự *mô hình hóa số liệu thực nghiệm*.

Chương này giới thiệu sơ lược một số vấn đề cơ bản của phương pháp số và mô hình hóa số liệu thực nghiệm.

6.2. Đạo hàm bằng số

Khi giải các phương trình vi tích phân bằng phương pháp số chúng ta cần phải tính các đạo hàm hoặc tích phân bằng số tại những điểm rời rạc nào đó. Để tính gần đúng đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_k$ người ta thường áp dụng các công thức *nội suy Newton tiến*, *nội suy Newton lùi* hoặc *nội suy Stirling*. Các công thức này được dùng khi điểm tính đạo hàm nằm ở đầu, ở cuối hoặc ở giữa bảng số liệu.

6.2.1. Các công thức nội suy Newton tiến

Giả sử hàm $y = f(x)$ được xác định tại $n+1$ điểm cách đều nhau x_0, $x_1...x_n$ tương ứng với các giá trị y_0, y_1… y_n. Đặt $x_i = x_0 + ih$ và $u = \dfrac{x - x_i}{h}$, trong đó h là độ dài của bước (khoảng cách giữa hai điểm cạnh nhau x_i và x_{i+1}). Khi đó, *các công thức nội suy Newton tiến* được cho bởi [10, 11]:

$$f(x) = y_0 + u\Delta y + \frac{u^2 - u}{2!}\Delta^2 y + \frac{u^3 - 3u^2 + 2u}{3!}\Delta^3 y + \frac{u^4 - 6u^3 + 11u^2 - 6u}{4!}\Delta^4 y + \frac{u^5 - 10u^4 + 35u^3 - 50u^2 + 24u}{5!}\Delta^5 y + ... \tag{6.1}$$

Đạo hàm phương trình (6.1) theo x ta thu được:

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y + \frac{2u - 1}{2!}\Delta^2 y + \frac{3u^2 - 6u + 2}{3!}\Delta^3 y + \frac{4u^3 - 18u^2 + 22u - 6}{4!}\Delta^4 y + \frac{5u^4 - 40u^3 + 105u^2 - 100u + 24}{5!}\Delta^5 y\right]. \tag{6.2}$$

Ở đây, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{h}$; Δy là hiệu hai giá trị liền kề nhau của y, $\Delta^2 y$ là hiệu hai giá trị liền kề nhau của Δy, v.v (ta gọi đây là các *sai phân*).

Đạo hàm phương trình (6.2) một lần nữa, ta được:

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{l}\Delta^2 y + \dfrac{6u - 6}{3!}\Delta^3 y + \dfrac{12u^2 - 36u + 22}{4!} + \\ + \dfrac{20u^3 - 120u^2 + 210u - 100}{5!}\Delta^5 y\end{array}\right]. \tag{6.3}$$

Các phương trình (6.2) và (6.3) cho ta giá trị gần đúng của đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm $f(x)$ tại điểm $x = x_0 + uh$ bất kì.

Khi $x = x_0$, $u = 0$, các phương trình (6.2) và (6.3) trở thành

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\Delta y-\frac{1}{2}\Delta^2 y+\frac{1}{3}\Delta^3 y-\frac{1}{4}\Delta^4 y+\frac{1}{5}\Delta^5 y-...\right], \qquad (6.4)$$

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y-\Delta^3 y+\frac{11}{12}\Delta^4 y-\frac{5}{6}\Delta^5 y+...\right]. \qquad (6.5)$$

Ví dụ 6.1: Tìm giá trị của $\frac{dy}{dx}$ và $\frac{d^2y}{dx^2}$ tại x = 1.0 theo bảng 6.1 sau đây:

Bảng 6.1

x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y_i	6.4680	6.6665	6.9264	6.2551	6.6601	7.1488

Ta có, do điểm cần tính các đạo hàm trùng với điểm đầu tiên (x_0 = 1.0) của bảng số liệu nên ta áp dụng (6.4) và (6.5). Trước hết, ta tính các sai phân tại các điểm được cho theo bảng trên. Kết quả được trình bày như trên bảng 6.2:

Bảng 6.2

x_i	y_i	$\Delta y_j = y_{i+1}-y_i$	$\Delta^2 y_k = \Delta y_{j+1}-\Delta y_j$	$\Delta^3 y_l = \Delta^2 y_{k+1}-\Delta^2 y_k$
1.0	6.4680			
		0.1985		
1.1	6.6665		0.0614	
		0.2599		0.0074
1.2	6.9264		0.0688	
		0.3287		0.0074
1.3	6.2551		0.0763	
		0.4050		0.0074
1.4	6.6601		0.0837	
		0.4887		
1.5	7.1488			

Do x_0= 1.0, h = 0.1 và u = 0 nên ta có:

$$\frac{dy}{dx} = y'(1.0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - ...\right]$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[0.1985 - \frac{1}{2}(0.0614) + \frac{1}{3}(0.0074)\right] = 1.7020,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''(1.0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta y_0 - \Delta^3 y_0 + ...\right] = \frac{1}{(0.1)^2}\left[0.0614 - 0.0074\right] = 5.4040$$

Ví dụ 6.2: Tìm đạo hàm bậc nhất và bậc hai tại điểm x = 1.1 của hàm số có các giá trị được cho theobảng 6.3 như sau:

Bảng 6.3.

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	0	0.1	0.5	1.25	2.4	3.9

Để tính đạo hàm cấp 1 và cấp 2 ta tiến hành tính các sai phân theo bảng số liệu trên. Kết quả được trình bày trên bảng 6.4:

Bảng 6.4.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.0	0				
		0.1			
1.2	0.1		0.3		
		0.4		0.05	
1.4	0.5		0.35		0
		0.75		0.05	
1.6	1.25		0.40		0
		1.15		0.05	
1.8	2.40		0.45		
		1.5			
2.0	3.90				

Nhận thấy tại điểm $x = 1.1$ không có trong bảng số liệu nên ta chọn một điểm gần với giá trị tính đạo hàm nhất (chính là $x_0 = 1.0$). Khi đó:

$$u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.1 - 1.0}{0.2} = 0.5.$$

Thay u = 0.5 vào (6.2) và (6.3) ta được giá trị của các đạo hàm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y + \frac{2p-1}{2}\Delta^2 y + \frac{3p^2 - 6p + 2}{6}\Delta^3 y\right]$$

$$= \frac{1}{0.2}\left[0.1 + 0 + \frac{3(0.5)^2 - 6(0.5) + 2}{6}(0.05)\right] = 0.48958.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y + (p-1)\Delta^3 y\right] = \frac{1}{(0.2)^2}\left[0.3 + (0.5-1)0.05\right] = 6.875.$$

6.2.2. Các công thức nội suy Newton lùi

Giả sử hàm số $y = f(x)$ được xác định tại các điểm cách đều nhau x_0, $x_1..x_n$ tương ứng với các giá trị y_0, y_1... y_n. Đặt $x_i = x_0 + ih$ và $\upsilon = \dfrac{x - x_n}{h}$, *các công thức nội suy Newton lùi* được cho bởi [10, 11]:

$$f(x) = y_n + \upsilon\Delta y_n + \frac{\upsilon(\upsilon+1)}{2!}\Delta^2 y_n + \frac{\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)}{3!}\Delta^3 y_n$$

$$+ \frac{\upsilon(\upsilon+1)(\upsilon+2)(\upsilon+3)}{4!}\Delta^4 y_n + ... \qquad (6.6)$$

Đạo hàm (6.6) theo x ta được:

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_n + \frac{2\upsilon+1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{4\upsilon^3 + 18\upsilon^2 + 22\upsilon + 6}{4!}\Delta^4 y_n\right.$$

$$\left. + \frac{5\upsilon^4 + 40\upsilon^3 + 105\upsilon^2 + 100\upsilon + 24}{5!}\Delta^5 y_n + ...\right. \qquad (6.7)$$

Tiếp tục đạo hàm (6.7) theo x ta được:

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_n + \frac{6\upsilon+6}{3!}\Delta^3 y_n + \frac{12\upsilon^2 + 36\upsilon + 22}{4!}\Delta^4 y_n\right.$$

$$+\frac{20\upsilon^3+120\upsilon^2+210\upsilon+100}{5!}\Delta^5 y_n\Bigg]. \qquad (6.8)$$

Từ (6.7) và (6.8) ta có thể tính gần đúng đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm $f(x)$.

Nếu $x = x_n$ thì $\upsilon = 0$. Lúc đó (6.7) và (6.8) trở thành:

$$f'(x_n)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_n+\frac{1}{2}\Delta^2 y_n+\frac{1}{3}\Delta^3 y_n+\frac{1}{4}\Delta^4 y_n+\frac{1}{5}\Delta^5 y_n+\ldots\right], \qquad (6.9)$$

$$f''(x_n)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_n+\Delta^3 y_n+\frac{11}{12}\Delta^4 y_n+\frac{5}{6}\Delta^5 y_n+\ldots\right]. \qquad (6.10)$$

Ví dụ 6.3: Một vật trượt dọc một đường ray. Quảng đường s của vật được xác định tại các thời điểm t theo bảng 6.5 như sau:

Bảng 6.5.

t (*giây*)	1	2	3	4	5	6
s (*mét*)	0.0201	0.0844	0.3444	1.0100	2.3660	4.7719

Hãy tìm vận tốc và gia tốc của vật tại t = 6 giây?

Ta có, dựa vào bảng 6.5 ta tính các sai phân (với h = 1.0)với kết quả được trình bày trên bảng 6.6. Do điểm tính vận tốc và gia tốc trùng với điểm cuối (t = 6) của bảng số liệu nên ta sử dụng các công thức (6.9) và (6.10). Từ (6.9), vận tốc của vật tại t = 6 giây là:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{h}\left[\Delta s+\frac{1}{2}\Delta^2 s+\frac{1}{3}\Delta^3 s+\frac{1}{4}\Delta^4 s+\frac{1}{5}\Delta^5 s+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{1.0}\left[2.4059+\frac{1}{2}(1.0499)+\frac{1}{3}(0.3595)+\frac{1}{4}(0.0748)+\frac{1}{5}(0.0)\right]=3.0694 \ (m/s).$$

Tương tự, gia tốc của vật tại t = 6 giây là:

$$\frac{d^2 s}{dt^2}=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 s+\Delta^3 s+\frac{11}{12}\Delta^4 s+\frac{5}{6}\Delta^5 s+\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{(1.0)^2}\left[1.0499 + 0.3595 + \frac{11}{12}(0.0748) + \frac{5}{6}(0)\right] = 1.4780 \quad (m/s^2).$$

Bảng 6.6.

T	s	Δs	$\Delta^2 s$	$\Delta^3 s$	$\Delta^4 s$	$\Delta^5 s$
1.0	0.0201					
		0.0643				
2.0	0.0844		0.1957			
		0.2600		0.2100		
3.0	0.3444		0.4056		0.0748	
		0.6656		0.2847		0.000
4.0	1.0100		0.6904		0.0748	
		1.3560		0.3595		
6.0	2.3660		1.0499			
		2.4059				
6.0	4.7719					

6.2.3. Các công thức nội suy Stirling

Giả sử hàm số $y = f(x)$ được xác định tại $2n + 1$ điểm cách đều nhau $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2} ... x_{\pm n}$ tương ứng với các giá trị $y_0, y_{\pm 1}, y_{\pm 2} ... y_{\pm n}$. Đặt $x_{\pm i} = x_0 \pm ih$ và $u = \dfrac{x - x_0}{h}$, các công thức nội suy Stirling [10,11] được cho bởi:

$$f(x) = y_0 + \frac{u}{1!}\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}\right] + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u^3 - u}{3!}\left[\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}\right] +$$

$$+\frac{u^4-u^2}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{u^5-5u^3+4u}{5!}\left[\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}\right]+\ldots \qquad (6.11)$$

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+u\Delta^2 y_{-1}+\frac{3u^3-1}{6}\left(\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2u^3-u}{12}\Delta^4 y_{-2}+\frac{5u^4-15u^2+4}{120}\left(\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\ldots\right)\right] \qquad (6.12)$$

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{l}\Delta^2 y_{-1}+\dfrac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\dfrac{6u^2-1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\\ +\dfrac{2u^3-3u}{12}\left(\dfrac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}\right)\ldots\end{array}\right]. \qquad (6.13)$$

Nếu $x = x_0$ thì $u = 0$. Lúc đó (6.12) và (6.13) trở thành:

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}\right)+\frac{1}{30}\left(\frac{\Delta^5 y_{-2}+\Delta^5 y_{-3}}{2}\right)+\ldots\right], \qquad (6.14)$$

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\ldots\right]. \qquad (6.15)$$

Ví dụ 6.4: Tìm các đạo hàm cấp một và cấp hai tại điểm $x = 0.2$ của hàm số được cho theo bảng 6.7 như sau:

Bảng 6.7.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0	0.10017	0.20134	0.30452	0.41076	0.52115

Do điểm $x = 0.2$ nằm trong bảng số liệu nên ta sử dụng các công thức (6.14) và (6.15). Thực hiện tính các sai phân tương tư như ở các ví dụ trên đây chúng ta thu được:

$$f'(0.2)=\frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{0.1}\left[\frac{0.10117+0.10318}{2}-\frac{1}{12}(0.00101+0.00105)\right]=1.020033$$

$$f''(0.2)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}\right]=\frac{1}{(0.1)^2}\left[0.00201-\frac{1}{12}(0.00004)\right]=0.200666$$

6.3. Tích phân bằng số

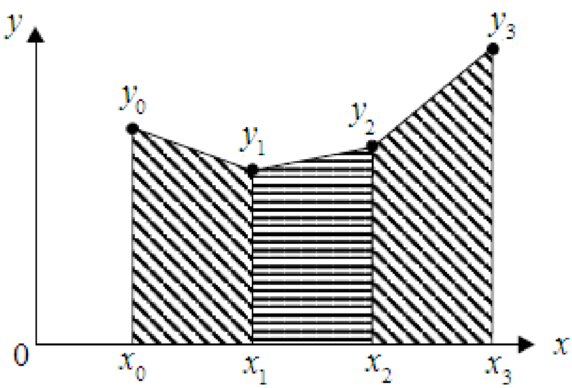
6.3.1. Quy tắc hình thang

Xét tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trong khoảng $[a, b]$.

$$I=\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (6.16)$$

Để xác định bằng số tích phân (6.16), ta chia miền lấy tích phần thành n đoạn nhỏ có độ dài h tương ứng với các hình thang như trên hình 6.1.

Nghĩa là, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; $x_i = a + ih$ với $h=\dfrac{b-a}{n}$.



Hình 6.1. Quy tắc hình thang tính gần đúng tích phân xác định.

Khi đó, diện tích của hình thang thứ nhất được tính gần đúng [1,7]:

$$I_1=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx\approx h\left[y_0+\frac{1}{2}\Delta y_0\right]=\frac{h}{2}\left[y_0+\frac{1}{2}(y_1-y_0)\right]=\frac{h}{2}(y_0+y_1)\,. \qquad (6.17a)$$

Tương tự ta có:

$$I_2=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\approx\frac{h}{2}(y_1+y_2)\,, \qquad (6.17b)$$

$$I_3=\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\approx\frac{h}{2}(y_2+y_3)\,, \qquad (6.17c)$$

$$I_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n). \qquad (6.17d)$$

Cuối cùng, ta có công thức tính gần đúng:

$$\begin{aligned} I\sum_{i=1}^{n} I_i &= \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + \cdots y_{n-1}\right) + y_n\right) \\ &= \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]. \end{aligned} \qquad (6.18)$$

Công thức (6.18) được gọi là *công thức quy tắc hình thang*.

Ví dụ 6.5: Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$. Hãy chia miền lấy tích phân thành 10 đoạn con bằng nhau rồi tính gần đúng tích phân theo phương pháp hình thang. So sánh với kết quả chính xác là $I = ln2 \approx$ 0.6931478.

Ta có, với n = 10 thì $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$ và $x_i = a + ih$. Kết quả thu được ở bảng 6.8:

Bảng 6.8.

i	x_i	$y_i = \frac{1}{x_i + 1}$
0	0	1
1	0.1	0.9090909
2	0.2	0.8333333
3	0.3	0.7692308
4	0.4	0.7142857
5	0.5	0.6666667
6	0.6	0.6250000
7	0.7	0.5882353
8	0.8	0.5555556
9	0.9	0.5263158
10	1.0	0.5000000

Áp dụng công thức hình thang (6.18) ta có:

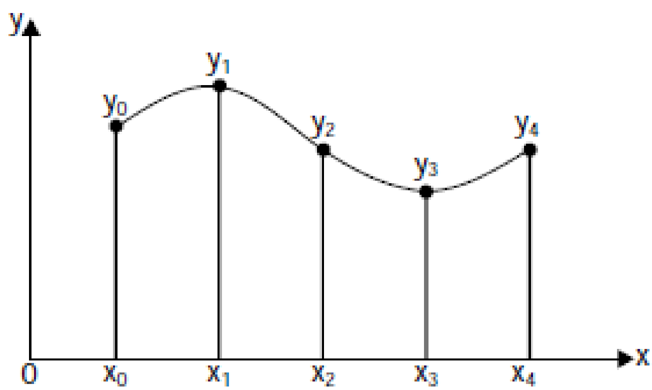
$$I \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + ... + y_9) + y_{10}) \approx 0.6937714 .$$

Đối chiếu kết quả trên với giá trị chính xác ($ln2$)ta tính được sai số tỉ đối là 0.08997%.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng (xem các tài liệu[10, 12]), sai số tuyệt đối của phương pháp hình thang có bậc cỡ $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M$, với M =Max$|f''(x)|$ trong khoảng [a, b]. Ta thấy, sai số sẽ giảm rất nhanh khi n tăng lên.

6.3.2. Quy tắc Simpson

Quy tắc Simpson cho ta độ chính xác cao và thuận lợi cho việc tính các tích phân xác định. Trong quy tắc này, miền lấy tích phân [a , b] được chia nhỏ thành một số chẵn n các khoảng con có độ dài mỗi khoảng là h như trên hình 6.2.



Hình 6.2. Minh họa quy tắc Simpson.

Để tính diện tích đã chia nhỏ ta áp dụng phép nội suy Newton.

Từ tích phân $I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ ta được:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots \right] dx, \quad (6.19)$$

ở đây, $x = x_0 + ph$, do đó:

$$I = h\int_{x_0}^{x_n} \left[y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p^2 - p}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots \right] dp. \quad (6.20)$$

Sau khi đơn giản (6.20), ta được:

$$I = h\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \ldots \right]. \quad (6.21)$$

Như vậy, với $n = 2$ ta có diện tích I_1 gần đúng bằng:

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x) \approx 2h\left[y_0 + 4y_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 y_0 \right] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Tương tự ta có

$$I_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x) \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

$$I_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Tổng quát, ta có công thức tính tích phân gần đúng:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)d\mathrm{x} &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})] \end{aligned} \quad (6.22)$$

trong đó $h = \dfrac{b-a}{n}$ với n là số chẵn. Công thức (6.22) được gọi là công thức *quy tắc Simpson* [10-12].

Ví dụ 6.6 : Tính gần đúng tích phân trong ví dụ 1 bằng quy tắc Simpson.

Thực hiện các tính toán tại các điểm lưới ta thu được trên bảng 6.9.

Bảng 6.9.

i	x_i	$y_i = \dfrac{1}{x_i + 1}$
0	0	1
1	0.1	0.9090909
2	0.2	0.8333333
3	0.3	0.7692308
4	0.4	0.7142857
5	0.5	0.6666667
6	0.6	0.6250000
7	0.7	0.5882353
8	0.8	0.5555556
9	0.9	0.5263158
10	1.0	0.5000000

Áp dụng công thức Simpson (6.22) ta có:

$$I \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

$$\approx 0.6931502.$$

Đối chiếu kết quả trên với giá trị chính xác ta ước lượng được sai số cỡ 0.0003462 %. Rõ ràng, phương pháp này chính xác hơn rất nhiều khi cùng khoảng chia *n*.

Người ta đã chứng minh được sai số tuyệt đối của công thức Simpson có bậc cỡ h^4 (xem [10, 12]). Do đó, với cùng độ rộng khoảng chia thì quy tắc Simson có độ chính xác cao hơn quy tắc hình thang. Thông thường, để tăng độ chính xác của phép tính số chúng ta cần giảm độ dài h. Điều này dẫn đến số phép tính sẽ tăng lên. Lúc đó, người ta thường sử dụng máy tính thay cho việc tính bằng tay. Phụ lục 2 giới thiệu chương trình máy tính viết trong phần mềm Maple để tính tích phân nói trên theo quy tắc Simpson.

6.4. Nghiệm bằng số các phương trình vi phân

6.4.1. Khai triểnTaylor

Xét phương trình vi phân cấp một:

$$y'(x) = f(x, y), \text{ với } y(x_0) = y_0. \qquad (6.23)$$

Giả sử $y = y(x)$ là một hàm có đạo hàm liên tục thỏa mãn phương trình (6.23) trên đoạn $[a, b]$. Ta khai triển y theo chuỗi Taylor quanh điểm x_0:

$$y(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{1!} y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y_0''' + \ldots \quad (6.24)$$

Chúng ta chia khoảng $[a, b]$, thành n khoảng con cách đều nhau và mỗi khoảng có độ dài là h. Khi đó các điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ được gọi là các *điểm lưới*, độ dài h được gọi là điểm *bước lấy tích phân*. Mối liên hệ giữa các điểm lưới được tính:

$$x_i = x_0 + ih. \qquad (6.25)$$

Thực hiện thay $x = x_1 = x_0 + h$ vào phương trình (6.24), ta được :

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \ldots \qquad (6.26)$$

Tương tự, chúng ta rút ra được mối liên hệ của hàm ở một điểm lưới với hàm ở điểm lưới liền trước:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!} y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{3!} y_i''' + \ldots \qquad (6.27)$$

Như vậy, bằng cách rời rạc hóa khai triển Taylor, chúng ta có thể tính được giá trị của hàm cần tìm tại điểm lưới thứ $i+1$ khi biết giá trị của hàm tại điểm lưới ngay trước đó. Cách thức tính giá trị của hàm cần tìm theo (6.27) được gọi là *phương pháp Taylor* [10]. Trong thực tế, chúng ta không thể sử dụng (6.27) với tất cả các số hạng khai triển bậc cao. Nếu bỏ qua các số hạng từ h^2 trở lên (tức là giữ số hạng bậc 1 của h) thì ta có *phương pháp Taylor bậc một*. Tương tự, ta có thể xây dựng các phương pháp Taylor bậc cao.

Phương pháp chuỗi Taylor áp dụng được khi ta biết các đạo hàm và chuỗi khai triển (6.24) hội tụ xung quanh điểm x_0.

Ví dụ 6.7: Sử dụng phương pháp chuỗi Taylor bậc hai để tìm lời giải gần đúng của phương trình sau:

$$y' = x + y, \text{ với } 0 \le x \le 1, y(0) = 1, \text{ lấy bước } h = 0.1.$$

So sánh kết quả thu được với nghiệm chính xác $y = -1 - x + 2e^x$.

Ta có: $f(x, y) = x + y$, các đạo hàm bậc 1 và bậc hai được tính:

$$y' = x + y\ ;\ y'' = 1 + y' = 1 + x + y.$$

Do đó, phương pháp chuỗi Taylor bậc hai trở thành:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(x_i + y_i + \frac{h}{2}(1 + x_i + y_i)\right).$$

Chọn h = 0.1 và tiến tính giá trị hàm tại các điểm lưới thu được như ở bảng 6.10:

Bảng 6.10.

i	x_i	y_i (Taylor)	$y(x_i)$ (thực tế)	Sai số $\lvert y(x_i)-y_i \rvert$
0	0	1	1	0
1	0.1	1.110000	1.110342	0.000342
2	0.2	1.242050	1.242806	0.000756
3	0.3	1.398465	1.399718	0.001253
4	0.4	1.581804	1.583649	0.001845
5	0.5	1.794894	1.797443	0.002549
6	0.6	2.040857	2.044238	0.003381
7	0.7	2.323147	2.327505	0.004358
8	0.8	2.645578	2.651082	0.005504
9	0.9	3.012364	3.019206	0.006842
10	1.0	3.428162	3.436564	0.008402

Ví dụ 6.8: Sử dụng phương pháp chuỗi Taylor bậc bốn để tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau:

$$y' + 4y = x^2,\ \ y(0) = 1, \text{ với } \ 0 \le x \le 1, \text{ lấy } h = 0.1.$$

So sánh với nghiệm chính xác :

$$y = \frac{31}{32}e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{32}.$$

Ta có: Nghiệm chuỗi Taylor bậc bốn được cho bởi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!}y_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y_i''' + \frac{h^3}{4!}y_i''''.$$

Do

$$y' = -4y + x^2 = f(x, y)$$

$$y'' = -4y' + 2x = 16y - 4x^2 + 2x$$

$$y''' = 16y' - 8x + 2 = -64y + 16x^2 - 8x + 2$$

$$y'''' = -64y' + 32x - 8 = 256y - 64x^2 + 32x - 8.$$

nên phương pháp chuỗi Taylor bậc bốn trở thành :

$$y_{i+1} = y_i + h\left(-4y_i + x_i^2 + \frac{h}{2}(16y_i - 4x_i^2 + 2x_i) + \frac{h^2}{6}(-64y_i + 16x_i^2 - 8x_i + 2) \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{24}(256y_i - 64x_i^2 + 32x_i - 8) \right).$$

Chọn h = 0.2 và thay vào biểu thức trên ta thu được kết quả như trên bảng 6.11:

Bảng 6.11.

i	x_i	y_i (Taylor)	$y(x_i)$ (chính xác)	Sai số$\lvert y(x_i)-y_i \rvert$
0	0	1	1	0
2	0.2	0.4538667	0.451537	0.002329
4	0.4	0.218936	0.216837	0.002099
6	0.6	0.1355514	0.134133	0.001418
8	0.8	0.1315904	0.130738	0.000852
10	1.0	0.1744731	0.173993	0.000480

6.4.2. Phương pháp Euler

Xét phương trình (6.27) và bỏ qua các số hạng khai triển từ bậc hai trở đi (phương pháp Taylor bậc một):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1!} y_i^{'}. \tag{6.28}$$

Sử dụng (6.23), ta có thể viết lại (6.28) dưới dạng khác:

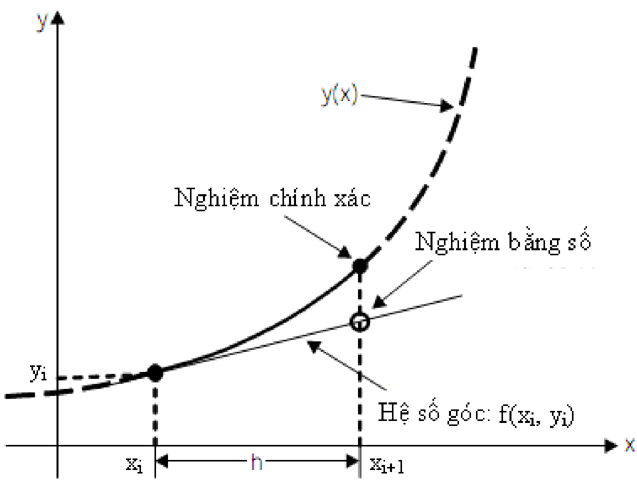
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{6.29}$$

$$x_{i+1} = x_i + h. \tag{6.30}$$

Các biểu thức (6.29) và (6.30) được gọi là các công thức của *phương pháp Euler* [12]. Trên phương diện hình học, ta có thể viết lại (6.29) dưới dạng khác:

$$y_{i+1} = y_i + (\textit{hệ số góc})\times h, \tag{6.31}$$

với *hệ số góc* = $y' = f(x, y)$ lấy tại điểm lưới x_i và được minh họa như trên hình 6.3.



Hình 6.3. Minh họa hình học của phương pháp Euler.

Như vậy, khi biết giá trị ban đầu $y_0 = y(x_0)$, ta lần lượt tính gần đúng giá trị hàm phải tìm tại các điểm kế tiếp:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)\ldots \qquad (6.32)$$

Từ đấy ta thấy, sẽ có sự *"tích lũy sai số"* trong quá trình tính toán từ điểm đầu đến điểm cuối. Người ta đã tính được sai số địa phương của phương pháp Euler tại điểm x_i là (xem các tài liệu [10-12]):

$$|y_i - y(x_i)| \le Mh, \qquad (6.33)$$

trong đó M là hằng số không phụ thuộc vào h. Rõ ràng, khi $h \to 0$ thì $y_i \to y(x_i)$. Để tăng độ chính xác thì giá trị của h cần phải nhỏ. Tuy nhiên, nếu h quá nhỏ thì sai số làm tròn trở nên đáng kể và do đó sai số toàn phần (tổng của sai số địa phương và sai số làm tròn) sẽ tăng lên.

Ví dụ 6.9. Lặp lại ví dụ 6.7, sử dụng phương pháp Euler.

Chọn số điểm lưới $n = 10$; $h = \dfrac{b-a}{n} = 0.1$; $x_i = ih$.

Các công thức tính là:

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i).$$

Kết quả tính toán thu được ở bảng 6.12:

Bảng 6.12.

i	x_i	y_i (Euler)	$y(x_i)$ (thực tế)	$\lvert y(x_i)-y_i\rvert$
0	0.0	1.0	1.0	0.0
1	0.1	1.100000	1.110342	0.010342
2	0.2	1.220000	1.242806	0.022806
3	0.3	1.362000	1.399718	0.037718
4	0.4	1.528200	1.583649	0.055449
5	0.5	1.721020	1.797443	0.076423
6	0.6	1.943122	2.044238	0.101116
7	0.7	2.197434	2.327505	0.130071
8	0.8	2.487178	2.651082	0.163904
9	0.9	2.815895	3.019206	0.203311
10	1.0	3.187485	3.436564	0.249079

6.4.3. Phương pháp Euler cải tiến

Xét khai triển Taylor (6.27) xung quanh x_i và giữ lại đến số hạng bậc hai:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{dy_i}{dx_i} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y_i}{dx_i^2}. \tag{6.34}$$

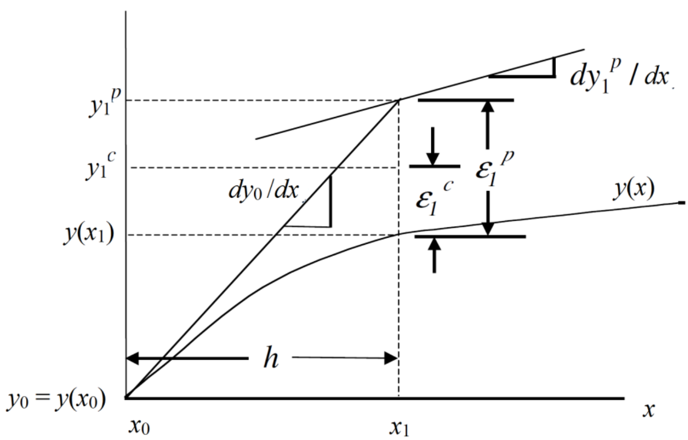
Dễ nhận thấy, khi đưa thêm đạo hàm cấp hai thì độ chính xác sẽ tăng lên so với phương pháp Euler. Lúc đó, ta phải tiến hành tính đạo hàm phương trình vi phân để tìm đạo hàm cấp hai. Tuy nhiên, việc phải xác định thêm đạo hàm cấp hai để tăng độ chính xác trong trường hợp chung là không tiện lợi. Để khắc phục điều này, người ta đã đưa ra *phương pháp Euler cải tiến* [12] để bao hàm đạo hàm cấp hai trong khai triển (6.34) dựa vào định nghĩa của đạo hàm:

$$\frac{d^2y_i}{dx_i^2} = \frac{1}{h}\left[\frac{dy_{i+1}}{dx_{i+1}} - \frac{dy_i}{dx_i}\right] = \frac{1}{h}\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)\right]. \tag{6.35}$$

Thay (6.35) vào (6.34) chúng ta thu được *công thức Euler cải tiến*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)\right]. \tag{6.36}$$

Về mặt hình học, ta minh họa phương pháp Euler cải tiến như hình 6.4.



Hình 6.4. Minh họa phương pháp Euler cải tiến: $y(x)$ là nghiệm chính xác, $y_i(x)$ là nghiệm bằng số, ε là kí hiệu của sai số, các chỉ số trên p và c tương ứng kí hiệu cho *giá trị tiên đoán* và *giá trị được bổ chính* theo chu trình Euler cải tiến.

Chúng ta giả thiết đóng góp chủ yếu vào *sai số địa phương* (kí hiệu là ε_i) trong phương trình (6.34) là số hạng $(d^2y_i/dx_i^2)h^2/2$ (do bỏ qua các đạo hàm bậc cao). Khi đó :

$$\varepsilon_i = \frac{d^2y_i}{dx_i^2}\frac{h^2}{2!} = \frac{\dfrac{dy_{i+1}}{dx_{i+1}} - \dfrac{dy_i}{dx_i}}{h}\frac{h^2}{2!} = \left(\frac{dy_{i+1}}{dx_{i+1}} - \frac{dy_i}{dx_i}\right)\frac{h}{2}. \qquad (6.37)$$

Chúng ta viết lại phương trình (6.37) dưới dạng tiện lợi trong quy trình tính số theo phương pháp Euler cải tiến:

$$y_{i+1}^p = y_i + h\frac{dy_i}{dx_i}, \qquad (6.38)$$

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^p}{dx_{i+1}} - \frac{dy_i}{dx_i}\right)\frac{h}{2}, \qquad (6.39)$$

$$y_{i+1}^c = y_i + h\frac{dy_i}{dx_i} + \varepsilon_i = y_{i+1}^p + \varepsilon_i. \qquad (6.40)$$

Bằng vài phép biến đổi đơn giản, chúng ta dễ nhận thấy rằng y_{i+1} trong các phương trình (6.36) và (6.40) là tương đương về mặt toán học. Tuy nhiên, sử dụng phương trình (6.40) có nhiều thuận lợi trong sử dụng chương trình máy tính, đặc biệt là khi cần tự động ước lượng độ dài *h* để sai số ε_i nhỏ hơn giá trị *dung sai* cho trước (ký hiệu là *tol*). Khi đó, quy trình tính toán theo phương pháp Euler cải tiến được tóm tắt theo các bước như sau:

Bước 1: Tính giá trị tiên đoán y_{i+1}^p bằng phương pháp Euler theo (6.38).

Bước 2: Ước lượng sai số ε_i theo phương trình (6.39) với chú ý rằng:

$$(dy_{i+1}^p/dx_{i+1}) = f(y_{i+1}^p, x_{i+1}), \text{ với } x_{i+1} = x_i + h.$$

Bước 3: Kiểm tra điều kiện $\varepsilon_i < tol$? Nếu không thỏa mãn thì giảm độ dài *h* và lặp lại bước 1.

Bước 4: Cộng sai số ε_i từ bước 3 vào y_{i+1}^p theo phương trình (6.40) để thu được giá trị được bổ chính y_{i+1}^c (được kí hiệu bởi chỉ số *c* phía trên).

Bước 5: Tăng *i* lên một đơn vị bằng cách cộng thêm *h* vào x_i và quay về bước 1 và lặp lại quá trình tính toán cho đến điểm cuối cùng của miền cần tìm nghiệm.

Ví dụ 6.10: Lặp lại ví dụ 6.7, sử dụng phương pháp Euler cải tiến.

Ta có: chọn số điểm lưới $n = 10$. Khi đó, $h = \dfrac{b-a}{n} = 0.1$; $x_i = ih$.

Tính giá trị tiên đoán $y_{i+1}^{(p)}$ bằng phương pháp Euler :

$$y_{i+1}^{(p)} = y_i + f(x_i, y_i)h = y_i + (x_i + y_i)h.$$

Tính sai số

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^{p}}{dx_{i+1}} - \frac{dy_i}{dx_i}\right)\frac{h}{2} = \left(f(y_{i+1}^{p}, x_{i+1}) - f(y_i, x_i)\right)\frac{h}{2}.$$

Để đơn giản trong tính toán bằng tay, ta bỏ qua bước 3 với giả thiết sai số ε_i (ứng với số điểm lưới nói trên) bé hơn giá trị *tol* nào đó. Từ đó, tính giá trị bổ chính để thu được nghiệm theo phương pháp Euler cải tiến:

$$y_{i+1}^{(c)} = y_{i+1}^{p} + \varepsilon_i.$$

Lần lượt thay $i = 1$ đến 10, ta thu được kết quả như bảng 6.13.

Bảng 6.13.

i	x_i	y_i(Euler cải tiến)	$y(x_i)$ (thực tế)	$\lvert y(x_i)-y_i\rvert$
0	0	1	1	0
1	0.1	1.110500	1.110342	0.000158
2	0.2	1.243100	1.242806	0.000294
3	0.3	1.400089	1.399718	0.000371
4	0.4	1.583989	1.583649	0.000340
5	0.5	1.797582	1.797443	0.000139
6	0.6	2.043932	2.044238	0.000306
7	0.7	2.326416	2.327505	0.001089
8	0.8	2.648757	2.651082	0.002325
9	0.9	3.015056	3.019206	0.004150
10	1.0	3.429832	3.436564	0.006732

6.4.4. Phương pháp Runge – Kutta

Trong các phương pháp tính số, phương pháp Runge – Kutta được sử dụng khá rộng rãi do có độ chính xác khá cao và đơn giản trong lập trình tính toán bằng máy tính. Để thành lập công thức Runge – Kutta ta xét khai triển Taylor của $y(x)$ xung quanh điểm x_i:

$$y(x) = y(x_i) + \frac{x - x_i}{1!} y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!} y''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{3!} y'''(c_i), \qquad (6.41)$$

với $c_i \in (x_i, x)$.

Thay $x = x_{i+1} = x_i + h$ vào biểu thức trên ta có :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(c_i), \qquad c_i \in (x_i, x_{i+1}) \quad (6.42)$$

Chúng ta xét đến số hạng đạo hàm bậc hai trong khai triển chuỗi Taylor và sau đó thay các số hạng đạo hàm bởi các giá trị hàm thích hợp

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i, y_i), \qquad (6.43)$$

ta được:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f'(x_i, y_i) \right]. \qquad (6.44)$$

Thực hiện phép thay thế

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i), \quad \text{với} \quad y' = f(x_i, y_i) \qquad (6.45)$$

vào phương trình (6.44) ta được :

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i) \right]. \qquad (6.46)$$

Để ý rằng, các số hạng trong ngoặc vuông của (6.46) chứa các đạo hàm nên có thể được thay thế bởi một hàm có dạng $af(x + \alpha, y + \beta)$. Khi đó, phương trình (6.46) trở thành [12]:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[af(x_i + \alpha, y_i + \beta) \right]. \qquad (6.47)$$

Khai triển hàm $f(x_i+\alpha, y_i+\beta)$ theo chuỗi Taylor với hai biến quanh điểm (x_i, y_i) và chỉ giữ lại các số hạng đạo hàm bậc nhất, chúng ta thu được:

$$y_{i+1} = y_i + ha\left[f(x_i, y_i) + \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i) \right]. \qquad (6.48)$$

Đồng nhất thức các phương trình (6.46) và (6.48) ta được:

$$a = 1,\ \alpha = h/2,\ \beta = h/2f(x_i, y_i). \qquad (6.49)$$

Như vậy, phương trình (6.47) trở thành :

$$y_{i+1} = y_i + hf\left[x_i + h/2, y_i + h/2 f(x_i, y_i)\right] \qquad (6.50)$$

Phương trình (6.50) có thể được viết dưới dạng kí hiệu mới (gọi là công thức *Runge-Kutta bậc hai*):

$$y_{i+1} = y_i + k_2^{(i)}, \qquad (6.51)$$

ở đây:

$$k_1^{(1)} = hf(x_i, y_i), \qquad (6.52a)$$

$$k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2). \qquad (6.52b)$$

Bằng cách trên đây, người ta đã xây dựng các công thức Runge – Kutta bậc cao hơn. Thông thường, các tính toán số sử dụng theo *phương pháp Runge-Kutta bậc bốn* được cho bởi:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \qquad (6.53)$$

ở đây:

$$k_1^{(1)} = hf(x_i, y_i), \qquad (6.54a)$$

$$k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2), \qquad (6.54b)$$

$$k_3^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2), \qquad (6.54c)$$

$$k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}). \qquad (6.54d)$$

Ví dụ 6.11: Giải bằng số đối với bài toán trong ví dụ 6.7 nhưng sử dụng phương pháp Runge – Kutta cấp bốn.

Áp dụng các công thức (6.44) và (6.53) ta tính được các kết quả như bảng 6.14.

Bảng 6.14.

x_i	$k_1^{(i)}$	$k_2^{(i)}$	$k_3^{(i)}$	$k_4^{(i)}$	y_i(R - K) cấp 4	$y(x_i)$ (thực tế)	$\lvert y(x_i)-y_i\rvert$
0.0	0.100000	0.110000	0.110500	0.121050	1.0	1.0	0.0
0.1	0.121034	0.132086	0.132639	0.144298	1.110342	1.110342	0.000000
0.2	0.144281	0.156495	0.157105	0.169991	1.242805	1.242806	0.000001
0.3	0.169972	0.183470	0.184145	0.198386	1.399717	1.399718	0.000001
0.4	0.198365	0.213283	0.214029	0.229768	1.583648	1.583649	0.000001
0.5	0.229744	0.246231	0.247056	0.264450	1.797441	1.797443	0.000002
0.6	0.264424	0.282645	0.283556	0.302779	2.044236	2.044238	0.000002
0.7	0.302750	0.322888	0.323895	0.345140	2.327503	2.327505	0.000003
0.8	0.345108	0.367363	0.368476	0.391956	2.651079	2.651082	0.000003
0.9	0.391920	0.416516	0.417746	0.443695	3.019203	3.019206	0.000003
1.0	0.443656	0.470839	0.472198	0.500876	3.436559	3.436564	0.000005

Thực tế, các tính toán số bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 thường được hỗ trợ bởi sử dụng máy tính. Phụ lục 3 giới thiệu chương trình máy tính viết trong Maple minh họa cho ví dụ trên đây.

6.5. Mô hình hóa số liệu thực nghiệm

Trong vật lí, từ các phép đo thực nghiệm chúng ta thu được tập hợp số liệu là các giá trị rời rạc. Thông thường, chúng ta *cần xấp xỉ/làm khớp* (fit) số liệu này với tổ hợp các hàm cơ bản đã biết (đa thức Legende, hàm spline, hàm lượng giác, hàm Gauss...) theo các hệ số (trọng số) sẽ được xác định dựa theo tiêu chí *xấp xỉ bình phương tối thiểu* (least-squares fit). Sự biểu diễn trường số liệu theo một biểu thức toán học nào đó được gọi là *mô hình hóa số liệu thực nghiệm*. Mục này, giới nguyên lí cơ bản của mô hình hóa số liệu thực nghiệm dựa trên phương pháp *xấp xỉ bình phương tối thiểu tuyến tính*. Những vấn đề chuyên sâu và các trường hợp ứng dụng có thể tìm hiểu trong các tài liệu [9, 13,19].

Giả sử chúng ta cần xấp xỉ tập hợp số liệu gồm N điểm $\{y_i,\ i = 1 \ldots N\}$ theo tập hợp M hàm $\phi_j(i)$ đã biết tương ứng với M tham số cần xác định p_j, $j = 1..M$) theo hệ thức:

$$y_i \equiv y(\{p_j\};i) = \sum_{j=1}^{M} p_j\phi_j(i). \tag{6.55}$$

Trong phương pháp gần đúng bình phương tối thiểu tuyến tính, các đại lượng y_i *phụ thuộc tuyến tính* theo các tham số $\{p_j\}$, nghĩa là hàm

$$\phi_j(i) \equiv \left[\frac{\partial y(\{p_j\};i)}{\partial p_j}\right] \tag{6.56}$$

không phụ thuộc vào các tham số $\{p_j\}$.

Tập hợp các tham số $\{p_j\}$ được xem là *tối ưu* đối với mô hình nghiên cứu nếu *tổng bình phương độ lệch chuẩn* S mô tả độ lệch giữa giá trị tính toán theo mô hình (vế phải của (6.55)) với giá trị thực nghiệm (vế trái của (6.55)) bé nhất. Trong đó:

$$S \equiv S(\{p_j\}) = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - y(\{p_j\};i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \sum_{j=1}^{M} p_j\phi_j(i)\right]^2. \tag{6.57}$$

Để S có giá trị bé nhất thì các đạo hàm riêng của S trong (6.57) tương ứng với mỗi tham số p_k phải đồng thời bằng 0, nghĩa là:

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = 0,\ j = 1..M. \tag{6.58}$$

Áp dụng (6.58) vào (6.57) ta có:

$$-2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - y(\{p_j\};i)\right]\frac{\partial y(\{p_j\};i)}{\partial p_k} = -2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \sum_{i=1}^{M} p_j\phi_j(i)\right]\phi_k(i) = 0. \tag{6.59}$$

Sắp xếp lại các biểu thức này ta thu được:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\phi_k(i)\right]=\sum_{j=1}^{M}p_j\left[\sum_{i=1}^{N}\left[\phi_j(i)\phi_k(i)\right]\right]. \qquad (6.60)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (6.60) ta thu được các hệ số p_j cần tìm.

Trong thực nghiệm, do các phép đo luôn gặp phải một sai số $\Delta u(i)$ nào đó nên người ta thường đánh giá độ tin cậy của phép biễu diễn theo *độ lệch quân phương không thứ nguyên* σ được định nghĩa bởi biểu thức*:*

$$\sigma=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i-y(i)}{\Delta u(i)}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.61)$$

Trong biểu thức (6.61)*,* y_i là giá trị thực nghiệm của phép đo thứ i, còn $y(i)$ là giá trị được tính toán theo mô hình biểu diễn. Ta dễ thấy rằng, *phép biễu diễn lúc đó được gọi là tin cậy nếu* $\sigma \le 1$.

Chúng ta xét trường hợp đơn giản là biểu diễn trường số liệu $\{x_i, y_i\}$ theo hàm tuyến tính dạng:

$$y = a_0 + a_1 x, \qquad (6.62)$$

với a_o và a_1 là hai hệ số cần xác định.

Khi đó, tổng bình phương độ lệch chuẩn (6.57)sẽ là:

$$S=(a_0+a_1x_1-y_1)^2+(a_0+a_1x_2-y_2)^2+...+(a_0+a_1x_n-y_n)^2. \qquad (6.63)$$

Dựa theo các điều kiện (6.58) chúng ta thu được:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=2(a_0+a_1x_1-y_1)+2(a_0+a_1x_2-y_2)+...+2(a_0+a_1x_n-y_n)=0, \qquad (6.64a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=2x_1(a_0+a_1x_1-y_1)+2x_2(a_0+a_1x_2-y_2)+...+2x_n(a_0+a_1x_n-y_n)=0\cdot \qquad (6.64b)$$

Chia hai vế phương trình cho 2 và gộp các hệ số a_0 và a_1, ta thu được:

$$\left.\begin{aligned} na_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_1&=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a_0+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a_1&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \end{aligned}\right\}. \qquad (6.65)$$

Từ hệ (6.65) ta suy ra các hệ số:

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{6.66a}$$

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{6.66b}$$

Thay các số liệu thực nghiệm $\{x_i, y_i\}$ vào (6.66a,b) ta sẽ tính được các hệ số cần tìm.

Một cách tổng quát, từ các phương trình (6.65) mở rộng cho trường hợp xấp xỉ số liệu theo đa thức trực giao cho *bậc m* (ứng với *m* hệ số a_i cần tìm):

$$\left.\begin{array}{l} a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^0\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^1\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \ldots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^0 \\ a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^1\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) + \ldots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^1 \\ \vdots \\ a_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^1\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) + \ldots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^1 \end{array}\right\} \tag{6.67}$$

Ví dụ 6.12: Cho số liệu thực nghiệm theo bảng 6.15 như sau:

Bảng 6.15.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.3	3.5	4.2	5.0	7.0	8.8	10.1	12.5	13.0	15.6

Hãy biểu diễn số liệu trên theo hàm bậc nhất bằng phương pháp xấp xỉ bình phương tối thiểu?

Ta có: hàm số mô tả gần đúng các giá trị của bảng số liệu có dạng:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Thay các giá trị thực nghiệm trong bảng số liệu vàocác phương trình (6.66a,b) với chú ý $n = 10$, ta thu được:

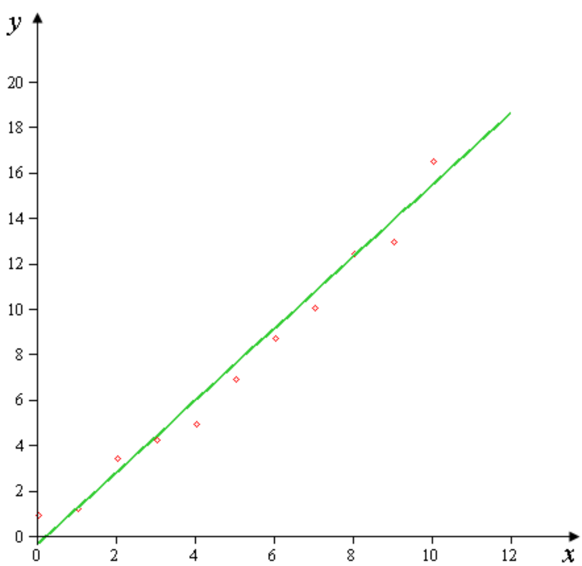
$$a_0 = \frac{385(81) - 55(572.4)}{10(385) - 55^2} = -0.360\,;$$

$$a_1 = \frac{10(572.4) - 55(81)}{10(385) - 55^2} = 1.538.$$

Vậy hàm số gần đúng nhất thu được là:

$$y = -0.360 + 1.538x.$$

Đồ thị của hàm gần đúng và các điểm số liệu được mô tả trên hình 6.6.



Hình 6.6. Đồ thị của hàm gần đúng (liền nét) và các điểm cho bởi bảng số liệu.

Chú ý: *Do mỗi phép đo trong thực nghiệm thường có một sai số nhất định nên để đánh giá được độ tin cậy của phép xấp xỉ ta cần tính độ lệch quân phương không thứ nguyên* σ *theo công thức* (6.61). *Lúc đó, phép xấp xỉ được gọi là tin cậy nếu* $\sigma \leq 1$.

Ví dụ 6.13: Biểu diễn số liệu cho bởi bảng 6.16 theo đa thức bậc hai.

Bảng 6.16.

x_i	0.00	0.25	0.5	0.75	1.00
y_i	1.000	1.2840	1.6487	2.1270	2.7183

Ta có: đối với bài toán này, m = 2 và n = 6. Hệ phương trình (6.67) trở thành:

$$5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680,$$

$$2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514,$$

$$1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015.$$

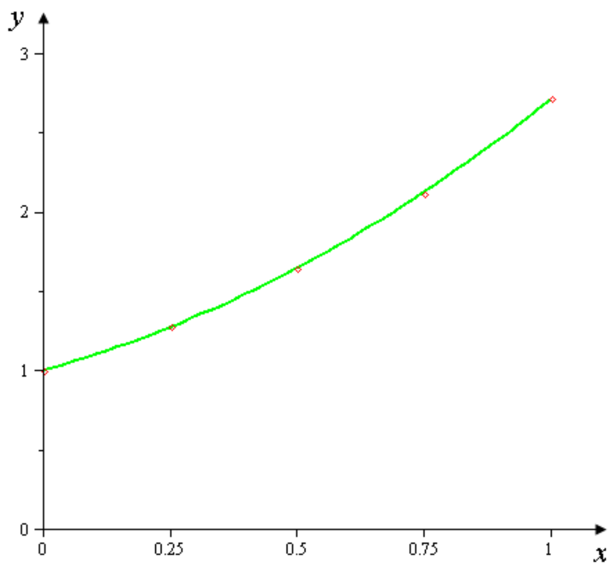
Giải hệ phương trình ta thu được :

$$a_0 = 1.0051,\ a_1 = 0.86468, \text{ và } a_2 = 0.84316.$$

Vì vậy, đa thức bậc hai được xấp xỉ với số liệu là :

$$y = 1.0051 + 0.86468x + 0.84316x^2 .$$

Đồ thị của hàm gần đúng và các điểm số liệu được mô tả trên hình 6.7.



Hình 6.7. Đồ thị của hàm gần đúng (liền nét) và các điểm cho bởi bảng số liệu.

Như vậy, với trường hợp xấp xỉ bình phương tối thiểu tuyến tính theo đa thức trực giao, vấn đề cốt lõi là cần giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Trong thực tế, chúng ta thường sử dụng đến các khai triển bậc cao nên số các phương trình đại số sẽ tăng lên. Lúc đó, chúng ta cần sự hỗ trợ của máy tính. Phụ lục 4 giới thiệu chương trình máy tính viết trong Maple để giải hệ phương trình tuyến tính trong ví dụ nói trên.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

6.1. Hãy ước lượng $f'(1.0)$ và $f''(1.0)$ theo bảng số liệu sau.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	-4	3	22	59	120	211

6.2. Một vật chuyển động trên đường thẳng. Vị trí của vật theo thời gian được cho bởi bảng sau:

$t_i(s)$	1	3	5	7	9	11
$y_i(m)$	0.1405	0.7676	3.5135	9.9351	21.5892	40.0324

Hãy tìm vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm t = 11 giây.

6.3. Xác định đạo hàm bậc nhất và bậc hai của hàm số được cho bảng dưới đây tại điểm $x = 1.1$.

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_i	0	0.128	0.544	1.298	2.440	4.02

6.4. Ước lượng bằng số tích phân $\int_0^{\pi} t\sin t dt$ theo quy tắc hình thang.

6.5. Ước lượng tích phân $\int_0^1 \cos x^2 dx$ sử dụng quy tắc hình thang với tám khoảng chia.

6.6. Sử dụng quy tắc hình thang để ước lượng $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ với h = 0.25.

6.7. Lặp lại bài toán **6.5** sử dụng quy tắc Simpson với $h = 0.25$.

6.8. Lặp lại bài toán **6.6** sử dụng quy tắc Simpson với $h = 0.25$.

6.9. Ước lượng tích phân $\int_2^6 \log_{10} x dx$ sử dụng quy tắc Simpson với $n = 6$.

6.10. Sử dụng phương pháp chuỗi Taylor bậc hai để tìm nghiệm gần đúng của phương trình $y' = -xy^2$ tại $x = 2.6$. Biết rằng $y(2) = 1$ và lấy $h = 0.1$.

6.11. Sử dụng phương pháp chuỗi Taylor tính gần đúng nghiệm của phương trình: $y' = xy + 1$ tại $x = 0.1$ (độ chính xác tới bốn chữ số thập phân). Biết $y(0) = 1$.

6.12. Sử dụng phương pháp Euler để giải phương trình $y' = -1.2y + 7e^{-0.3x}$ từ $x = 0$ đến $x = 2$ với điều kiện đầu $y = 3$ khi $x = 0$. Lấy $h = 0.5$.

6.13. Sử dụng phương pháp Euler để giải phương trình $y' = -2xy^2$ từ $x = 0$ đến $x = 0.5$ với điều kiện đầu $y = 1$ khi $x = 0$. Lấy $h = 0.1$.

6.14. Lặp lại bài toán **6.12** sử dụng phương pháp Euler cải tiến.

6.15. Lặp lại bài toán **6.13** sử dụng phương pháp Euler cải tiến.

6.16. Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc hai để giải các phương trình sau:

a) $y' = -x^2 - y + 1$, $y(0) = 1$ và $0 \le x \le 0.5$. Lấy $h = 0.1$.

b) $y' = \sin y$, $y(0) = 1$ và $0 \le x \le 0.5$. Lấy $h = 0.1$.

6.17. Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc hai để tìm $y(1.2)$ của phương trình sau:

$$y' = \frac{(1+xy)}{(x+y)}, y(1) = 1.2. \text{ Lấy } h = 0.1.$$

6.18. Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc bốn để các giải phương trình sau:

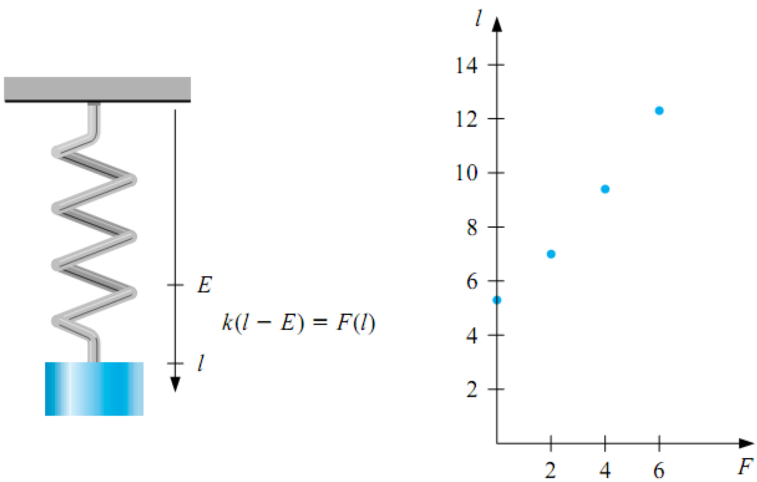
a) $y' = -1.2y + 7e^{-0.3x}$, $y(0.4) = 0.41$ và $0 \le x \le 1.5$. Lấy $h = 0.5$.

b) $y' = -2xy^2$, $y(0) = 1$ và $0 \le x \le 1$. Lấy h = 0.2.

6.19. Sử dụng phương pháp Runge – Kutta bậc bốn để tìm y(0.2) và y(0.4) của phương trình sau:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2},\ y(0) = 1. \text{ Lấy } h = 0.2.$$

6.20. Theo định luật Hooke, khi một lực tác dụng vào một lò xo đồng chất, chiều dài của lò xo là một hàm của lực tác dụng, được mô tả như trong hình dưới:



a) Giả sử E = 6.3 cm và đo chiều dài l (cm) và trọng lực $F(l)$ (N) cho bởi bảng sau. Tìm hàm xấp xỉ bình phương tối thiểu của k.

$F(l)$	2	4	6
L	7.0	9.4	12.3

b) Tiếp tục đo chiều dài, cho bảng số liệu bổ sung như sau. Sử dụng số liệu này để tìm hàm xấp xỉ bình phương tối thiểu của k. Trường hợp **a)** hay **b)** phù hợp tốt hơn với trường số liệu thực nghiệm?

$F(l)$	3	5	8	10
l	8.3	11.3	14.4	16.9

6.21. Tìm các đa thức bình phương tối thiểu bậc 1, 2 và 3 theo bảng số liệu sau đây. Tính tổng bình phương độ lệch chuẩn *S* trong mỗi trường hợp. Vẽ đồ thị của bảng số liệu và các đa thức.

x_i	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

PHỤ LỤC 1

Hàm gốc và ảnh Laplace của một số hàm đơn giản

$f(x)$	$F(s)$	Miền xác định	$f(x)$	$F(s)$	Miền xác định
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$	k	$\frac{k}{s}$	$s > 0$
x	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$	x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$ $n \in \mathrm{N}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$	xe^{ax}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	
$e^{ax} - 1$	$\frac{a}{s(s-a)}$	$s > a$	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\sin\omega x$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$	$x\sin\omega x$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s > 0$
$\cos\omega x$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$	$x\cos\omega x$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s > 0$
$\mathrm{sh}\,\omega x$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$	$x\,\mathrm{sh}\,\omega x$	$\frac{2s\omega}{(s^2-\omega^2)^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$
$\mathrm{ch}\,\omega x$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$	$x\,\mathrm{ch}\,\omega x$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$	$s > \lvert\omega\rvert$
$e^{ax}\sin\omega x$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$		$xe^{ax}\sin\omega x$	$\frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	
$e^{ax}\cos\omega x$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$		$xe^{ax}\cos\omega x$	$\frac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	
$e^{ax}\,\mathrm{sh}\,\omega x$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$	$s - a > \lvert\omega\rvert$	$xe^{ax}\,\mathrm{sh}\,\omega x$	$\frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2-\omega^2]^2}$	$s - a > \lvert\omega\rvert$
$e^{ax}\,\mathrm{ch}\,\omega x$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$	$s - a > \lvert\omega\rvert$	$xe^{ax}\,\mathrm{ch}\,\omega x$	$\frac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2-\omega^2]^2}$	$s - a > \lvert\omega\rvert$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$		$\frac{1}{ab} - \frac{e^{-at}}{a(b-a)} - \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	

PHỤ LỤC 2

Chương trình tính tích phân bằng số theo quy tắc Simpson trong *Maple*

```
>restart;
># Nhập hàm:
>f:=x->1/(1+x):
>a:=0:b:=1:n:=20:h:=(b-a)/(n):
>tot:=0:
>for j from 1 to n-1 do
>xj:=a+(1*j)*h:
>tot:=evalf(tot+f(xj))
>od:
>tot:=evalf(h/2*(f(a)+f(b)+2*tot)):
>#SIMPSON:
>tot1:=0:
>for k from 1 to n/2-1 do
>xk:=a+(2*k)*h:
>tot1:=evalf(tot1+f(xk))
>od:
>tot2:=0:
>for l from 1 to n/2 do
>xl:=a+(2*l-1)*h;
>tot2:=evalf(tot2+f(xl))
>od:
>tot4:=evalf(h/3*(f(a)+f(b)+2*tot1+4*tot2));
```

PHỤ LỤC 3

Chương trình tìm nghiệm phương trình vi phân cấp một theo phương pháp Runge – Kutta cấp 4 trong Maple

```
> restart;
> # DAU VAO:CAC DIEM A,B; DIEU KIEN DAU: ALPHA; SO NGUYEN N.
> # XUAT RA:  GIA TRI GAN DUNG W CUA Y TAI (N+1) GIA TRI CUA T.
> RK_CAP_BON := proc() local F, OK, A, B, ALPHA, N, FLAG, NAME, OUP,
H, T, W, I, K1, K2, K3, K4;
> printf(`PHUONG PHAP RUNGE - KUTTA BAC BON.\n`);
> printf(`NHAP VAO HAM SO F(t,y) THEO t VA y\n`);
> printf(`CHANG HAN: y+t\n`);
> F := scanf(`%a`)[1];
> F := unapply(F,t,y);
> OK := FALSE;
> while OK = FALSE do
> printf(`NHAP CAC DIEM BEN TRAI VA PHAI DUOC CACH NHAU BOI
MOT KHOANG TRONG_CACH\n`);
> A := scanf(`%f`)[1];
> B := scanf(`%f`)[1];
> if A >= B then
> printf(`DIEM BEN TRAI PHAI NHO HON DIEM BEN PHAI\n`);
> else
> OK := TRUE;
> fi;
> od;
> printf(`NHAP DIEU KIEN BAN DAU\n`);
> ALPHA := scanf(`%f`)[1];
> OK := FALSE;
```

```
> while OK = FALSE do
> printf(`NHAP MOT SO NGUYEN DUONG CHO SO CAC KHOANG CON\n`);
> N := scanf(`%d`)[1];
> if N <= 0 then
> printf(`SO PHAI NGUYEN DUONG\n`);
> else
> OK := TRUE;
> fi;
> od;
> if OK = TRUE then
> printf(`CHON CACH XUAT KET QUA:\n`);
> printf(`1. XUAT RA MAN HINH\n`);
> printf(`2. XUAT RA DANG FILE VAN BAN\n`);
> printf(`HAY NHAP 1 HOAC 2\n`);
> FLAG := scanf(`%d`)[1];
> if FLAG = 2 then
> printf(`NHAP TEN FILE DANG:\\ten.ext\n`);
> printf(`CHANG HAN  A:\\Doai.DTA\n`);
> NAME := scanf(`%s`)[1];
> OUP := fopen(NAME,WRITE,TEXT);
> else
> OUP := default;
> fi;
> fprintf(OUP, `PHUONG PHAP RUNGE-KUTTA BAC BON\n`);
> fprintf(OUP,****************************************\n`);
> fprintf(OUP,`| t |  K1  |  K2  |  K3  |  K4  |  w|\n`);
> fprintf(OUP,`****************************************\n`);
> # BUOC 1
```

```
> H := (B-A)/N;
> T := A;
> W := ALPHA;
> fprintf(OUP, `%6.3f %11.7f\n`, T, W);
> # BUOC 2
> for I from 1 to N do
> # BUOC 3
> # Use K1, K2, K3, K4 for K(1), K(2), K(3), K(4) resp.
> K1 := H*F(T,W);
> K2 := H*F(T+H/2.0, W+K1/2.0);
> K3 := H*F(T+H/2.0, W+K2/2.0);
> K4 := H*F(T+H,W+K3);
> # BUOC 4
> # Compute W(I)
> W := W+(K1+2.0*(K2+K3)+K4)/6.0;
> # Compute T(I)
> T := A+I*H;
> # BUOC 5
> fprintf(OUP, `%6.3f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f %11.7f\n`, T, K1, K2, K3,
K4,W);
> od;
> # BUOC 6
> if OUP <> default then
> fclose(OUP):
> printf(`Output file %s created successfully`,NAME);
> fi;
> fi;
> fprintf(OUP,`*************************************\n`);
> RETURN(0);
```

> end:

> RK_CAP_BON ();

DAY LA PHUONG PHAP RUNGE - KUTTA BAC BON.

NHAP VAO HAM SO F(t,y) THEO t VA y

CHANG HAN: y+t

> y+t

NHAP CAC DIEM BEN TRAI VA PHAI DUOC CACH NHAU BOI MOT KHOANG TRONG_CACH

> 0 1

NHAP DIEU KIEN BAN DAU

> 1

NHAP MOT SO NGUYEN DUONG CHO SO CAC KHOANG CON

> 10

CHON CACH XUAT KET QUA:

1. XUAT RA MAN HINH

2. XUAT RA DANG FILE VAN BAN

HAY NHAP 1 HOAC 2

> 1

PHỤ LỤC 4

Chương trình máy tính giải hệ phương trình đại số tuyến tính trong Maple

```
> restart:
> with(linalg):gọi thư viện đại số tuyến tính trong Maple :
> # Nhập các phương trình tuyến tính :
> f1:=4*w11-w12-w21 = 0:
> f2:=-w11+4*w12-w13-w22 = 0:
> f3:=-w12+4*w13-w23 = 25:
> f4:=-w11+4*w21-w22-w31 = 0:
> f5:=-w12-w21+4*w22-w23-w32 = 0:
> f6:=-w13-w22+4*w23-w33 = 50:
> f7:=-w21+4*w31-w32 = 25:
> f8:=-w22-w31+4*w32-w33 = 50:
> f9:=-w23-w32+4*w33 = 150:
> # Tạo ma trận của các hệ số của các phương trình trên:
> C:=genmatrix({f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9},[w11,w12,w13,w21,
  w22,w23,w31,w32,w33]):
> # Tạo ma trận vế phải:
> U:=matrix(9,1,[0,0,25,0,0,50,25,50,150.0]):
> # Giải tìm nghiệm đối với w11, w12, w13, w21, w22, w23, w31,  w32,
w33:
> linsolve(C,U);
```

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Chương 1:

1.1. Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Bình phương hai vế ta được: $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$, hay $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Áp dụng định nghĩa tích vô hướng và sử dụng kí hiệu độ dài các canh *a, b, c* của tam giác *ABC* ta thu được:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ (đpcm).}$$

1.4. a) $S_{PQR} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right|$, trong đó:

$$\overrightarrow{PQ} = (1,1,2);\ \overrightarrow{PR} = (4,4,4);\ \overrightarrow{PQ} \text{ x } \overrightarrow{PR} = (-4,4,0)$$

Thực hiện tính tích vectơ ta thu được:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}.$$

b) Ba vectơ tạo bởi ba cạnh của tám giác *PQR* luôn phụ thuộc tuyến tính do:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QR}.$$

1.5. a) Cách 1(áp dụng định nghĩa): biểu diễn 1 vectơ theo hai vectơ còn lại ta thấy các hệ số khai triển phải đồng thời bằng không (suy ra hệ vectơ độc lập tuyến tính).

Cách 2: ta có $\overrightarrow{PQ}$ =(1,1,2); $\overrightarrow{PR}$ =(4,4,4); $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-4,4,0)$; $\overrightarrow{PM}$ =(2,3,4), nên:

$$\left(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right).\overrightarrow{PM} = -4.2 + 4.3 + 0.4 \neq 0$$

Do tích bội ba vô hướng khác không nên ba vectơ không đồng phẳng, suy ra ba vectơ độc lập tuyến tính với nhau.

b) Thể tích hình hộp tạo bởi ba vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ và $\overrightarrow{PM}$ là:

$$V = \left|\left(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right).\overrightarrow{PM}\right| = \left|-4.2+4.3+0.4\right| = 4$$

1.6. a) Theo định luật Lorentz ta có: $\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$.

Mặt khác, do:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \frac{\vec{v}_1\times\vec{r}}{r^2}$$

nên:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{v}_2\times\left(\vec{v}_1\times\vec{r}\right).$$

b) Lực từ tác dụng lên điện tích q_1 là:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{v}_1\times\left(\vec{v}_2\times\vec{r}\right).$$

1.7.a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1}{2}$. Từ đây suy ra : $\alpha = 60^0$.

b) $a_b = |\vec{a}|\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{3^2+6^2+9^2} = \dfrac{3\sqrt{14}}{2}$.

$$b_a = |\vec{b}|\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

c) $S = |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin(\vec{a},\vec{b}) = 21\sqrt{3}$.

1.8. Ta thấy, khoảng cách từ đường thẳng tới một mặt phẳng bất kì chỉ khác không khi và chỉ khi đường thẳng song song với mặt phẳng đó. Về mặt toán học, điều này dẫn đến:

$$\vec{b}.\vec{e}_n = 0.$$

Khi đó, ta dễ dàng rút ra:

$$d = \left|\left(\vec{a}-\vec{r}\right).\vec{e}_n\right|.$$

1.9. Vectơ đơn vị theo hương pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{e}_n = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$. Ta thấy, tích vô hướng $\vec{b}.\vec{e}_n \neq 0$ nên đường thẳng cắt mặt phẳng tại điểm *P* nào đó. Để tìm giao điểm *P* ta chỉ cần thay các giá trị *x, y, z* của một điểm bất kì nào đó vào phương trình mặt phẳng ta thu được:

$$1 + 4\lambda + 2(2 + 5\lambda) + 3(3 + 6\lambda) = 6.$$

Rút ra λ = -1/4. Thay giá trị này vào phương trình đường thẳng ta được:

$$x = 1 - \tfrac{1}{4}(4) = 0\,;\; y = 2 - \tfrac{1}{4}(5) = \tfrac{3}{4}\,; z = 3 - \tfrac{1}{4}(6) = \tfrac{3}{2}\,.$$

Vậy tọa độ của giao điểm P là (0, 1/4, 3/2).

Chương 2:

2.1. Hướng dẫn: Vì chất điểm chịu tác dụng lực xuyên tâm nên mômen lực sẽ bằng không. Mặt khác, do mômen lực có giá trị bằng đạo hàm của vectơ mômen động lượng $\vec{L}$ nên ta suy ra:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \text{constant}\,.$$

Theo tính chất của tích vectơ trong chương 1 ta suy ra vectơ vận tốc $\vec{v}$ luôn vuông góc với $\vec{L}$ nên quỹ đạo của chất điểm luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

2.2. a)

$$\begin{aligned}\text{rot}\left(u\vec{A}\right) &= \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(uA_z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(uA_y\right)\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}(uA_x) - \frac{\partial}{\partial x}(uA_z)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(uA_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}(uA_x)\right) \\ &= \vec{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}A_z + u\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}A_y - u\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}A_x + u\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}A_z - u\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ &\quad + \vec{k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}A_y + u\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}A_x - u\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$= u\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}A_z-\frac{\partial u}{\partial z}A_y\right)\vec{i}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}A_x-\frac{\partial u}{\partial x}A_z\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}A_y-\frac{\partial u}{\partial y}A_x\right)\vec{k}\right]$$

$$= u\,\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\times\mathrm{grad}\,u$$

b) Ta có:

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\nabla\left[\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_z\right)\vec{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(A_yB_z-A_zB_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_zB_x-A_xB_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_xB_y-A_yB_x\right)$$

$$=\left(B_z\frac{\partial A_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial x}-B_y\frac{\partial A_z}{\partial x}-A_z\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)+\left(B_x\frac{\partial A_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial y}-B_z\frac{\partial A_x}{\partial y}-A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

$$+\left(B_y\frac{\partial A_x}{\partial z}+A_x\frac{\partial B_y}{\partial z}-B_x\frac{\partial A_y}{\partial z}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)$$

$$=\left[B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$-\left[A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\right]=\vec{B}\,\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\,\mathrm{rot}\vec{B}.$$

c) rot($\vec{A}\times\vec{B}$)= $\vec{A}$ div $\vec{B}$ - $\vec{B}$ div $\vec{A}$ + ($\vec{B}$ **.**∇) $\vec{A}$ - ($\vec{A}$ **.**∇) $\vec{B}$.

d) grad ($\vec{A}$ **.** $\vec{B}$) = $\vec{B}\times$ rot $\vec{A}$ + $\vec{A}\times$ rot $\vec{B}$ + ($\vec{B}$ **.**∇) $\vec{A}$ + ($\vec{A}$ **.**∇) $\vec{B}$.

e) div(grad u) = ∇**.**(∇u) = (∇**.**∇)u = = $\nabla^2 u$ = Δu,

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,u\right)=\nabla\left(\nabla u\right)=\nabla\left(\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\nabla^2 u=\Delta u$$

f) $\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}u\right)=\nabla\times\left(\nabla u\right)=\nabla\times\left(\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\equiv 0.$$

g) div(rot $\vec{A}$) =∇[$\nabla\times$ $\vec{A}$] $\equiv$ 0.

h) $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)$ = grad(div $\vec{A}$) - Δ $\vec{A}$.

2.3. Ta có:

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3} = k\frac{\left(P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = k\frac{xP_x + yP_y + zP_z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = \varphi(\vec{r}) = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = k\left[\frac{P_x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{3x\left(xP_x + yP_y + zP_z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\right] = k\left[\frac{P_x}{r^3} - \frac{3x\vec{P}\vec{r}}{r^5}\right]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = k\left[\frac{P_y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{3y\left(xP_x + yP_y + zP_z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\right] = k\left[\frac{P_y}{r^3} - \frac{3y\vec{P}\vec{r}}{r^5}\right]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k\left[\frac{P_z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{3z\left(xP_x + yP_y + zP_z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\right] = k\left[\frac{P_z}{r^3} - \frac{3z\vec{P}\vec{r}}{r^5}\right].$$

Ta được:

$$\vec{E} = -k\left[\left(\vec{i}\frac{P_x}{r^3} + \vec{j}\frac{P_y}{r^3} + \vec{k}\frac{P_z}{r^3}\right) + \frac{3\vec{P}\vec{r}}{r^5}\left(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\right)\right] = k\left(\frac{3\left(\vec{P}\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right).$$

2.4.

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{i}\left(M_y z - M_z y\right) + \vec{j}\left(M_z x - M_x z\right) + \vec{k}\left(M_x y - M_y x\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{M_x y - M_y x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{M_z x - M_x z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\frac{M_x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{3y\left(M_x y - M_y x\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} + \frac{M_x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3z\left(M_z x - M_x z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\right]$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\frac{2M_x}{r^3} - \frac{3y\left(M_x y - M_y x\right)}{r^5} + \frac{3z\left(M_z x - M_x z\right)}{r^5}\right]$$

Tương tự:

$$B_y = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\frac{2M_y}{r^3} - \frac{3z\left(M_y z - M_z y\right)}{r^5} + \frac{3x\left(M_x y - M_y x\right)}{r^5}\right],$$

$$B_z = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\frac{2M_z}{r^3} - \frac{3x\left(M_z x - M_x z\right)}{r^5} + \frac{3y\left(M_y z - M_z y\right)}{r^5}\right].$$

Ta được:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\frac{2}{r^3}\left(M_y\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}\right) + \frac{3}{r^5}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\left(M_x x + M_y y + M_z z\right)\right.$$
$$\left. - \frac{3\left(M_y\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}\right] = \frac{\mu_o}{4\pi}\left(\frac{2\vec{M}}{r^3} - \frac{3(\vec{M}\,\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)$$

2.5. $\nabla\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \vec{i}\left(4xy - z^3\right) + \vec{j}.2x^2 + \vec{k}.3xz^2$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4y + 6xz\,.$$

2.6. Mặt đẳng thế u = C

a) $u = x^2 - y^2 = C = a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ là các đường hypebol.

b) $u = x^2 + 3y^2 + z^2$ = C là các elip tròn xoay hypebol.

2.7. $\text{grad}u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

a) Vuông góc với trục z:

b) $\vec{k}.\text{grad}u = 0 \Rightarrow \vec{k}\left(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}\right) = 0 \Rightarrow z = 0$

c) $\text{grad}u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$.

2.8. Hệ số Lame trong các hệ tọa độ:

Hệ tọa độ trụ: $h_1 = 1;\ h_2 = \rho;\ h_3 = 1$,

Hệ tọa độ cầu: $h_1 = 1;\ h_2 = r;\ h_3 = r\sin\theta$.

Từ đó xác định được các yếu tố vi phân diện tích và thể tích:

$$\begin{cases} dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3, \\ dS_2 = h_1 h_3 dq_1 dq_3, \\ dS_3 = h_1 h_2 dq_1 dq_2, \end{cases} ;\ dV = h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 .$$

2.9. Ta có: $\text{div}\vec{A} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\dfrac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \dfrac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \dfrac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right]$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta A_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\phi\right)}{\partial\phi}.$$

2.10. $\text{grad}\,u(q_1, q_2, q_3) = \dfrac{\vec{e}_1}{h_1}\dfrac{\partial u}{\partial q_1} + \dfrac{\vec{e}_2}{h_2}\dfrac{\partial u}{\partial q_2} + \dfrac{\vec{e}_3}{h_3}\dfrac{\partial u}{\partial q_3} = \vec{e}_\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{\vec{e}_\phi}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\phi} + \vec{e}_z\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

2.11. Biểu thức rot $\vec{A}$ trong hệ tọa độ trụ:

$$\text{rot}\vec{A} = \frac{1}{h_\rho h_\phi h_z}\begin{vmatrix} h_\rho\vec{e}_\rho & h_\phi\vec{e}_\phi & h_z\vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ h_\rho A_\rho & h_\phi A_\phi & h_z A_z \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\phi+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\phi\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\vec{e}_z\,.$$

2.12. Thông lượng của trường vectơ

$$\vec{A}:\oiint_S \vec{A}.d\vec{S}=\iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\,dV\,.$$

Trong hệ tọa độ cầu:

$$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\cos\theta\right)=1,\; dV=r^2\sin\theta drd\phi d\theta\,,$$

ta được:

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\,dV=\int_0^{\sqrt{a}} r^2dr\int_0^{\pi/2} d\phi\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=\frac{2\pi}{3}a^{3/2}\,.$$

2.14.

a) $$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{e}_x\frac{dx}{dt}+\vec{e}_y\frac{dy}{dt}+\vec{e}_z\frac{dz}{dt}=\left(3t^2+2\right)\vec{e}_x+\left(6e^{-2t}\right)\vec{e}_y+10\cos 5t.\vec{e}_z\,,$$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0}=2\vec{e}_x+6\vec{e}_y+10\vec{e}_z\,.$$

b) $$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0}=\sqrt{2^2+6^2+10^2}=2\sqrt{35}\,.$$

c) $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{e}_x\frac{d^2x}{dt^2}+\vec{e}_y\frac{d^2y}{dt^2}+\vec{e}_z\frac{d^2z}{dt^2}=6t\vec{e}_x-12e^{-2t}\vec{e}_y-50\sin 5t.\vec{e}_z\,,$$

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0}=-12\vec{e}_y\,.$$

d) $$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0}=12\,.$$

2.15. $u=2x^2+4yz-5z^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x = 12,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4z = 8,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 4y - 10z = -24.$$

Ta được vectơ đơn vị là:

$$\vec{e} = \frac{12\vec{e}_x + 8\vec{e}_y - 24\vec{e}_z}{\sqrt{12^2 + 8^2 + 24^2}} = \frac{3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 6\vec{e}_z}{7},$$

hoặc

$$-\vec{e} = -\frac{3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 6\vec{e}_z}{7}.$$

2.16. $\text{grad}f(r) = \nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial x} f(r)\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} f(r)\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} f(r)\vec{e}_z$

$$= f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\vec{e}_x + f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}\vec{e}_y + f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$= f'(r)\frac{x}{r}\vec{e}_x + f'(r)\frac{y}{r}\vec{e}_y + f'(r)\frac{z}{r}\vec{e}_z = \frac{f'(r)}{r}\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}.$$

2.17. Do $\vec{e}_t$ là vectơ đơn vị theo hướng của gia tốc tiếp tuyến nên ta có thể biểu diễn $\vec{v} = v\vec{e}_t$. Khi đó:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{e}_t\right) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v^2\frac{d\vec{e}_t}{ds}.$$

Vì $\vec{e}_t.\vec{e}_t = 1$ nên đạo hàm hai vế theo s ta được:

$$\vec{e}_t.\frac{d\vec{e}_t}{ds} + \frac{d\vec{e}_t}{ds}.\vec{e}_t = 0 \text{ hay } \frac{d\vec{e}_t}{ds}.\vec{e}_t = 0.$$

Điều này chứng tỏ $\frac{d\vec{e}_t}{ds}$ vuông góc với $\vec{e}_t$. Nói cách khác, $\frac{d\vec{e}_t}{ds}$ sẽ cộng tuyến với $\vec{e}_n$. Từ đây ta có thể viết:

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \alpha\vec{e}_n$$

với α độ lớn của $d\vec{e}_t / ds$ và được tính:

$$\alpha = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{1/2} = \frac{1}{R}.$$

Vì vậy ta được:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n.$$

2.18. a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2y = 12$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 - 6yz = 14$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -3y^2 = -12$.

$\overrightarrow{PQ} = (2,-3,6)$: $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{-3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = 12.\frac{2}{7} - 14.\frac{3}{7} - 12.\frac{6}{7} = -\frac{90}{7}.$$

b) Theo hướng mà đạo hàm của *u* là cực đại:

$$\mathrm{grad}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (6, 7, -6).$$

c) $|\mathrm{grad}u| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 6^2} = 11$.

2. 20. Theo định lí O-G, thông lượng gửi qua một mặt kín xác định bởi:

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_i q_i.$$

Để tính cường độ điện trường tại điểm *A* bên trong quả cầu cách tâm một khoảng $r < R$, ta vẽ mặt cầu S_1 bán kính *r*. Tại mọi điểm trên S_1, $\vec{E}$ luôn vuông góc với mặt cầu nên điện thông gửi qua S_1 là $E.4\pi r^2$.

Điện tích bên trong S_1: $q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$.

Áp dụng định lí O-G ta thu được:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Tương tự với những điểm bên ngoài quả cầu:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\,\varepsilon_0 r^2}, \quad q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho .$$

Chương 3:

3.1. **a)** Eliptic nếu: $x \neq 0,\ |y+1| < 3$;

Parabolic nếu: $\{x=0,\ y \neq 4\}; \{x \neq 0, y = -4\}; \{x \neq 0,\ y = 2\}$

Hyperbolic nếu: $\{x=0,\ y < -4\}; \{x \neq 0, y > 2\}$.

b) Eliptic nếu: $y > 0$;

Parabolic nếu: $y = 0$;

Hyperbolic nếu: $y < 0$.

3.3. Nghiệm cần tìm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l}t \right)\sin\frac{k\pi x}{l} .$$

Từ điều kiện ban đầu ta có:

$$a_k = 0, \qquad b_k = \frac{4v_0}{k\pi a\left(1 - \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)} \sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi^2}{2l} .$$

Do đó, nghiệm cần tìm của bài toán đã cho là:

$$u(x,t) = \frac{4v_0}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi^2}{2l}}{k\left(1-\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

3.4. Phương trình dao động của sợi dây:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Điều kiện biên : $u\big|_{x=0} = 0$; $u\big|_{x=l} = A\sin\omega t$.

Điều kiện ban đầu : $u\big|_{t=0} = 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$.

Ta tìm nghiệm của (1) dưới dạng tổng của hai hàm:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x, t)$$

trong đó:

- Hàm $w(x,t)$ thoả mãn phương trình : $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

và thỏa mãn điều kiện biên :

$$w\big|_{x=0} = 0; \quad w\big|_{x=l} = A\sin\omega t .$$

- Hàm $v(x,t)$ thoả mãn phương trình: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ và thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} v\big|_{x=0} = u\big|_{x=0} - w\big|_{x=0} = 0 \\ v\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\big|_{t=0} = -w\big|_{t=0} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} - \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp tách biến, ta tìm được nghiệm:

$$u(x,t) = \frac{A\sin\dfrac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\sin\dfrac{\omega}{a}l} + \frac{2A\omega a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

3.5. Chúng ta tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$$

dưới dạng:

$$u(x, t) = V(x) + W(x,t).$$

- Hàm $V(x)$ thoả mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -bx(x-l).$$

thoả mãn điều kiện biên:

$$V\big|_{x=0} = 0;\ V\big|_{x=l} = 0.$$

- Hàm $W(x)$ thoả mãn phương trình: $\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ và thoả mãn điều kiện biên:

$$W\big|_{x=0} = 0;\ W\big|_{x=l} = 0.$$

Kết quả thu được:

$$V(x) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2x^2 l + l^3),$$

$$W(x,t) = \frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

Hay:

$$u(x,t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2x^2 l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

3.6. Phương trình dao động của thanh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Các điều kiện biên:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0;\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0.$$

Các điều kiện ban đầu :

$$u\big|_{t=0} = -\varepsilon x = f(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$$

Dùng phương pháp tách biến, ta tìm nghiệm của phương trình dưới dạng

$u(x,t) = X(x)T(t)$.

Chúng ta thấy, về mặt toán học thì bài toán này hoàn toàn giống bài toán dao động của sợi dây có hai mút gắn chặt. Vì vậy, lập luận tương tự ta thu được kết qủa:

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

3.8. *Hướng dẫn*: Giải bài toán bằng phương pháp tách biến thông thường. Ở đây chú ý điều kiện đầu là hàm tuần hoàn nên việc tìm các hệ số a_n và b_nđơn giản hơn. Kết quả thu được:

$$u(x,t) = \cos 6t\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 8t\sin 4x + \frac{1}{12}\sin 12t\sin 6x - 4\cos 20t\sin 10x.$$

3.9. Gọi $u(x, y, t)$ là độ lệch của màng tại điểm (x, y) ở thời điểm t. Phương trình dao động của màng có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \text{với } \left\{\begin{matrix} 0 \le x \le l \\ 0 \le y \le l \\ 0 \le t < \infty \end{matrix}\right\}.$$

Các điều kiện ban đầu:

$$u(x, y, 0) = Axy(l - x)(l - y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0;$$

Các điều kiện biên:

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(0, l, t).$$

Sử dụng phương pháp tách biến chúng ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x, y, t) = V(x, y)T(t) = X(x)\,Y(y)T(t).$$

Kết quả thu được:

$$u(x,y,t) = \frac{64Al^4}{\pi^6}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{l}}{(2n+1)^3(2m+1)^3}\cos\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\,\frac{\pi at}{l}.$$

3.10. Gọi $u(x, y, t)$ là độ lệch của màng tại (x, y) ở thời điểm t. Phương trình dao động của màng :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

Các điều kiện đầu:

$$u(x, y, 0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0 \ ; (x, y) \notin \sigma_\varepsilon \\ v_0 \ ; (x, y) \in \sigma_\varepsilon \end{cases}.$$

Các điều kiện biên :

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(0, d, t).$$

Do điều kiện biên giống bài 3.12 nên ta có nghiệm riêng:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos\omega_{mn}t + b_{mn}\sin\omega_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d},$$

$$\omega_{mn} = \pi a\sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{d^2}}\ .$$

Do $u(x, y, 0) = 0$ nên $a_{mn} = 0$. Để tìm b_{mn} ta sử dụng:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{mn}b_{mn}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}.$$

Để tiếp tục tính toán b_{mn} ta giả thiết xung ban đầu tập trung trong hình vuông có cạnh ε rất bé. Thực hiện tính b_{mn} theo công thức tính hệ số đã biết sau đó lấy giới hạn $\varepsilon \to 0$ ta thu được:

Kết quả tính toán ta thu được nghiệm:

$$u(x, t) = \frac{4A}{ld}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{\omega_{mn}}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{d}\sin\omega_{mn}t.$$

3.11. Gọi $u(x, t)$ là nhiệt độ trong thanh tại thời điểm t. Ta có phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Các điều kiện biên:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Điều kiện ban đầu:

$$u(x,0) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$

Sử dụng phương pháp tách biến, ta rút ra được nghiệm cần tìm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left[\frac{k\pi a}{l}\right]^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Từ điều kiện đầu ta có:

$$a_k = -\frac{4c}{k^3\pi^3}\left[\cos k\pi - 1\right] = \begin{cases} 0; & k = 2n \\ \dfrac{8c}{(2n+1)^3\pi^3}; & k = 2n+1 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của bài toán là:

$$u(x,t) = \frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right]^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

3.14. *Đáp số*: $u(x,t) = 50^o e^{-0,004t} \sin\frac{2\pi x}{l}$.

3.15. Gọi $u(x, t)$ là nhiệt độ trong thanh tại thời điểm t. Ta có phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Các điều kiện biên:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0;\ u\big|_{x=l} = u_0.$$

Điều kiện ban đầu:

$$u(x, 0) = f(x).$$

Nghiệm của bài toán được tìm dưới dạng:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

trong đó $v(x, t)$ và $w(x, t)$ cùng thỏa mãn phương trình thuần nhất và các điều kiện sau:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0;\ v\big|_{x=l} = u_0,$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; w\big|_{x=l} = 0,$$

$$w\big|_{t=0} = \varphi(x) - v\big|_{t=0}.$$

Sử dụng phương pháp tách biến ta tìm được nghiệm:

$$u(x,t) = U_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-a^2(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l};\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx - \frac{(-1)^n 4U_o}{(2n+1)\pi}.$$

3.16. Phương trình truyền nhiệt của thanh :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Các điều kiện biên:

$$u(0, t) = At;\ u(l, t) = 0.$$

Điều kiện đầu:

$$u(x,0) = 0.$$

Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng :

$$u(x,t) = v(x,t) + At - \frac{x}{l}At.$$

Dễ rút ra được các điều kiện đầu và điều kiện biên đối với $v(x, t)$ như sau:

$$v(0, t) = 0;\ \ v(l, t) = 0;$$

$u(x,0) = 0.$

Tiếp tục tách:

$$v(x, t) = v_1(x) + w(x, t),$$

ta suy ra được phương trình cho hàm $v_1(x, t)$:

$$a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\frac{Ax}{l} + A,$$

với các điều kiện biên:

$$v_1\big|_{x=0} = 0; v_1\big|_{x=l} = 0.$$

Còn hàm $w(x, t)$ thoả mãn phương trình :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

với các điều kiện biên :

$$w\big|_{x=0} = 0; w\big|_{x=l} = 0$$

và điều kiện ban đầu :

$$w\big|_{t=0} = -v_1(x).$$

Giải các phương trình trên ta được:

$$v_1(x) = -\frac{Al^2}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right],$$

$$w(x,t) = \frac{2Al^2}{\pi^3 a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Vậy, nghiệm của bài toán là:

$$u(x,t) = At\left(1-\frac{x}{l}\right) - \frac{Al^2}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right] + \frac{2Al^2}{a^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

3.17. Ta tìm nghiệm của dưới dạng:

$$u(x,\ t) = v(x,\ t) + \frac{x}{l}Ae^{-t},$$

với $v(x, t)$ thoả mãn các điều kiện biên:

$$v(0, t) = v(l, t) = 0$$

và điều kiện đầu :

$$v(x, 0) = 0.$$

Ta tìm nghiệm của $v(x, t)$ dưới dạng :

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Thay vào phương trình truyền nhiệt rồi giải, ta thu được:

$$v(x,t) = \frac{2Al^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{e^{-t}}{k(k^2\pi^2 - l^2)}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Vậy, nghiệm của bài toán là:

$$u(x,t) = \frac{Ax}{l}e^{-t} + \frac{2l^2 A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-t\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} e^{-t}}{n(n^2\pi^2 - l^2)}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Chương 4:

4.1. a) Ta có $|z - 2| = |x + iy - 2| = |x - 2 + iy| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 3$,

hay

$$(x-2)^2 + y^2 = 9.$$

Đây là phương trình đường tròn có tâm tại (2, 0) và bán kính là 3.

b) Ta có: $|x + iy - 2| = |x + iy + 4|$,

hay

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}.$$

Bình phương hai vế ta tìm được x = -1, đây là một đường thẳng.

c) Tương tự ta có:

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$ hay $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}$.

Bình phương hai vế ta được:

$$25+3x=5\sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$

Tiếp tục bình phương và rút gọn ta được $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Đây là phương trình của một Elip có các trục là 5 và 4.

4.2. $w = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy) + (iy)^3$

$$= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^2 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

Từ đây rút ra:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \text{ và } v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

b) $e^{3z} = e^{3(x + iy)} = e^{3x}\, e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i\sin 3y)$.

Do đó:

$$u = e^{3x}\cos 3y,\ v = e^{3x}\sin 3y.$$

c) $\ln z = \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln\rho + i\varphi = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\tan^{-1} y/x$.

Do đó:

$$u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), v=\tan^{-1} y/x.$$

4.3. Sử dụng công thức Euler:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z;\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z,$$

ta có

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

a)

$$\sin z = \sin(x+iy)=\frac{e^{i(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2i}=\frac{1}{2i}\{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\}$$

$$=(\sin x)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i(\cos x)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y.$$

b) Chứng minh tương tự câu a).

4.4. a) $\dfrac{dw}{dz} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\dfrac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)}-\dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)} = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

b) Hàm khả tích tại mọi điểm, ngoại trừ $z = 1$, tại đây không tồn tại đạo hàm, tức là hàm không khả tích tại $z = 1$.

4.5. Ta có

$$\int_{1+i}^{2+i} z^2 dz = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (\mathrm{x}+\mathrm{iy})(\mathrm{dx}+\mathrm{idy}) = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2+2ixy)(dx+dy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2)dx - 2xydy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2ixydx + (x^2-y^2)dy\,.$$

a) Các điểm (1, 1) và (2, 4) tương ứng với $t = 1$ và $t = 2$. Khi đó các tích phân trên trở thành:

$$\int_{t=1}^{2}\{(t^2-t^4)dt - 2(t)(t^2)2tdt\} + i\int_{t=1}^{2}\{2t(t^2)dt + (t^2-t^2)(2t)dt\} = -\frac{86}{3} - 6i$$

b) Đường thẳng nối điểm (1, 1) và (2, 4) có phương trình:

$$y-1 = \frac{4-1}{2-1}(x-1)\text{ hay } y = 3x-2.$$

Ta tìm được:

$$\int_{x=1}^{2}\{[x^2-(3x-2)^2]dx - 2x(3x-2)3dx\} + i\int_{x=1}^{2}\{2x(3x-2)dx + [x^2-(3\mathrm{x}-2)^2]3dx = -\frac{86}{3} - 6i.$$

4.6. Ta có:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_{C_1}\frac{f(z)}{a-z}dz\,.$$

Đặt $z - a = \varepsilon e^{i\theta}$, tích phân cuối trở thành $i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta.$ Nhưng khi $f(z)$ khả tích thì nó sẽ liên tục, do đó:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta = i\int_0^{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}(f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)d\theta = 2\pi i\, f(a)\,.$$

Từ đó thay vào và rút ra được kết quả theo yêu cầu.

4.7. a) Do $z = \pi$ nằm trong C, nên

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz = \cos\pi = -1,$$

tương tự bài 4.6 với: $f(z) = \cos z$, $a = \pi$.

Ta rút ra được:

$$\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz = -2\pi i\,.$$

b) Ta có: $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}dz = \oint_C e^z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_C \frac{e^z}{z}dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1}dz$

$$= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i(1-e^{-1})\,.$$

4.8. Bằng tích phân Cauchy ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

Nếu $n = 2$ và $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$, và $f'(1) = 10.$ Từ đó ta có:

$$10 = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-3)^3}dz \text{ hay} \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-3)^3}dz = 10\pi i\,.$$

4.9. Ta có: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 2^n}.$

Giá trị $u_n = \frac{z^n}{n^2 2^n}$, khi đó:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}\cdot\frac{n^2 2^n}{z^n}\right| = \frac{|z|}{2}.$$

Bằng cách kiểm tra tỉ số, chuỗi hội tụ nếu $|z| < 2$ và phân kì nếu $|z| > 2$. Nếu $|z| = 2$ tỉ số không thỏa mãn.

Tuy nhiên, trị tuyệt đối của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2 2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z^n|}{n^2 2^n}$ hội tụ nếu $|z|$ = 2, khi đó $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ. Do đó, chuỗi hội tụ (một cách tuyệt đối) với $|z| \le 2$, tức là tất cả mọi điểm bên trong đường tròn $|z| = 2$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...$

Khi đó ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.\frac{(2\mathrm{n}-1)!}{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-z^2}{2n(2n+1)}\right| = 0.$$

Khi đó chuỗi mô tả hàm sinz, hội tụ tại mọi điểm của z.

4.10. Ta có:

a) $\frac{z^2}{(z+1)^3}$, z = -1 là một điểm cực bậc 3.

b) $\frac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$, z =4 là một điểm cực bậc 2; $z = i$ và $z = 1 - 2i$ là các điểm cực bậc 1.

c) $\frac{\sin mz}{z^2 + 2z + 2}$, $m \neq 0$.

Do $z^2 + 2z + 2 = 0$ khi $z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$, nên chúng ta có thể viết:

$z^2 + 2z + 2 = \{z - (-1+i)\}\{z - (-1 - i)\} = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$.

Hàm số có hai điểm cực $z = -1 + i$ và $z = -1 - i$.

d) $e^{-1/(z-1)^2} = 1 - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2!(z-4)^4} - \cdots$. Đây là chuỗi Laurent với phần chính có vô số giá trị khác 0. Ta có, z = 1 là một điểm kì dị cần thiết.

4.11. Ta có:

a)

$$z\cos\frac{1}{z} = z\left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \cdots\right) = z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \frac{1}{6!z^5} + \cdots$$

Ta thấy $z = 0$ là một điểm kì dị. Chuỗi hội tụ với mọi $z \neq 0$.

b) $\frac{\sin z}{z-\pi}$, điểm kì dị tại z = π.

Đặt z - π = u. Khi đó z = π + u và

$$\frac{\sin z}{z-\pi} = \frac{\sin(u+\pi)}{u} = -\frac{\sin u}{u} = -\frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= -1 + \frac{u^2}{3!} - \frac{u^4}{5!} + \cdots = -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \cdots$$

Chuỗi hội tụ với mọi giá trị của z.

c) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, z = -1. Đặt z + 1 = u, khi đó:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{u-1}{u}(1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots) = -\frac{1}{u} + 2 - 2u + 2^2 - 2u^3 + \cdots$$

$$= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - \cdots$$

Ta thấy z = -1 là một điểm cực bậc 1. Chuỗi hội với các giá trị của z thỏa mãn điều kiện 0 < |z + 1| < 1.

d) $\frac{1}{z(z+2)^3}$, các điểm kì dị z = 0, -2.

Trường hợp z = 0, ta có:

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8z(1+z/2)^3} = \frac{1}{8z}\left\{1+(-3)\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{8z}-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}z-\frac{5}{32}z^2+\cdots$$

z = 0 là một điểm cực bậc 1.

Trường hợp z = -2. Đặt z + 2 = u, ta có:

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{1}{-2u^3(1-u/2)} = -\frac{1}{2u^3}\left\{1+\frac{u}{2}+\left(\frac{u}{2}\right)^2+\left(\frac{u}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=-\frac{1}{2u^3}-\frac{1}{4u^2}-\frac{1}{8u}-\frac{1}{32}u-\cdots$$

$$=-\frac{1}{2(z+2)^3}-\frac{1}{4(z+2)^2}-\frac{1}{8(z+2)}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}(z+2)-\cdots$$

z = -2 là một điểm cực bậc 3. Chuỗi hội tụ với 0 < |z + 2| < 2.

4.12. *Hướng dẫn*:

a) $\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, với z = 2, i, -i là các điểm cực bậc 1.

Thặng dư tại z = 2 là:

$$\lim_{z\to 2}(z-2)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right\}=\frac{4}{5}.$$

Thặng dư tại z = i là:

$$\lim_{z\to 2}(z-i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{i^2}{(i-2)(2i)}=\frac{1-2i}{10}.$$

Thặng dư tại z = -i là:

$$\lim_{z\to 2}(z+i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{i^2}{(-i-2)(2i)}=\frac{1+2i}{10}.$$

b) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$. Ta thấy z = 0 là một điểm cực bậc 1, z = -2 là một điểm cực bậc 3.

Khi đó, thặng dư tại $z = 0$ là $\lim\limits_{z\to 0} z.\dfrac{1}{z(z+2)^3} = \dfrac{1}{8}$.

Thặng dư tại z = -2 là:

$$\lim_{z\to -2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^3.\frac{1}{z(z+2)^3}\right\} = \lim_{z\to -2}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \lim_{z\to -2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^3}\right) = -\frac{1}{8}.$$

c) $\dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$, có z = 3 là một điểm cực bậc 2 và có thặng dư là:

$$\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left\{(z-3)^2.\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right\} = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}(ze^{zt}) = \lim_{z\to 3}(e^{zt}+zte^{zt}) = e^{3t}+3te^{3t}.$$

d) cosz, với $z = 5\pi$ là một điểm cực bậc 1.

Khi đó, thặng dư tại $z = 5\pi$ là:

$$\lim_{z\to 5\pi}(z-5\pi)\frac{\cos z}{\sin z} = \left(\lim_{z\to 5\pi}\frac{z-5\pi}{\sin z}\right)\left(\lim_{z\to 5\pi}\cos z\right) = \left(\lim_{z\to 5\pi}\frac{1}{\cos z}\right)(-1) = (-1)(-1) = 1.$$

4.13.Tính $\oint_C \dfrac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2}$. Ta có:

Thặng dư tại z = 1 là

$$\lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \frac{e}{16}.$$

Thặng dư tại z = -3 là:

$$\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left\{(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \lim_{z\to -3}\frac{(z-1)e^z - e^z}{(z-1)^2} = \frac{-5e^{-3}}{16}.$$

Do $|z| = 10$ bao quanh cả hai cực $z = 1$ và $z = -3$, tích phân trên bằng

$$I = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right) = \frac{\pi i(e - 5e^{-3})}{8}.$$

4.14. Chứng minh: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2x+2\right)} = \frac{7\pi}{50}$.

Tương tự như bài trên ta tính thặng dư tại $z = i$ và $z = -1 + i$

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{9i-12}{100},$$

và

$$\lim_{z\to -1+i}\left\{(z+1-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)^2(z+1+i)}\right\} = \frac{3-4i}{25}.$$

Khi đó giá trị tích phân sẽ là:

$$\oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i\left\{\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right\} = \frac{7\pi}{50}.$$

4.15. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$. Đặt $z = e^{i\theta}$.

Khi đó:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}, dz = ie^{i\theta} = izd\theta,$$

vì vậy

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{5+3\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} = \oint_C \frac{2dz}{3z^2+10iz-3}.$$

ở đây, C là đường tròn bán kính đơn vị với tâm tại gốc tọa độ.

Các điểm cực của $\frac{2}{3z^2+10iz-3}$ là $-3i$ và $-i/3$, tuy nhiên, chỉ có $-i/3$ là nằm bên trong đường tròn C. Khi đó: ta có:

Thặng dư tại $-i/3$ là:

$$\lim_{z\to -i/3}\left(z+\frac{i}{3}\right)\left(\frac{2}{3z^2+10iz-3}\right)=\lim_{z\to -i/2}\frac{2}{6z+10i}=\frac{1}{4i}.$$

Áp dụng định lí thặng dư ta thu được:

$$\oint_C \frac{2dz}{3z^2+10iz-3}=2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

4.16. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$

Nếu $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}, \cos 3\theta=\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}=\frac{z^3+z^{-3}}{2}, dz=izd\theta$

thì ta có:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\oint_C\frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-4\left(\frac{z-z^{-1}}{2}\right)}\frac{dz}{iz}=-\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz\cdot$$

Tích phân có một điểm cực bậc 3 tại $z = 0$ và một cực bậc 1 tại $z = ½$ trong đường tròn C.

Thặng dư tại $z = 0$ và $z = ½$ là

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3.\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\}=\frac{21}{8},\quad \lim_{z\to 1/2}\left\{(z-\frac{1}{2}).\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\}=-\frac{65}{24}.$$

Khi đó

$$-\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz=-\frac{1}{2i}(2\pi i)\left\{\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right\}=\frac{\pi}{12}.$$

Chương 5:

5.1. Do $f(t) = e^{-at}$, ta có:

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-at}\sin\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-at}\frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})dt$$

$$=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}(e^{(i\omega-a)t}-e^{-(i\omega+a)t})dt=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-\frac{1}{i\omega-a}-\frac{1}{i\omega+a})=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2i\omega}{(\omega^2+a^2)}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+a^2}.$$

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-at}\cos\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-at}\frac{1}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})dt$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}(e^{(i\omega-a)t}+e^{-(i\omega+a)t})dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-\frac{1}{i\omega-a}+\frac{1}{i\omega+a})$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2a}{(\omega^2+a^2)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}.$$

Do $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega x d\omega$ nên khi thay biểu thức

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+a^2}$$

vào rồi thực hiện tích phân ta được:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+a^2}\sin\omega x d\omega.$$

Hay:

$$\frac{\pi}{2}e^{-ax}=\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{\omega^2+a^2}\sin\omega x d\omega.$$

Tương tự ta có:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega x d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}\cos\omega x d\omega.$$

Hay

$$\frac{\pi}{2a}e^{-ax}=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{\omega^2+a^2}d\omega.$$

5.2. Áp dụng công thức biến đổi Fourier ta có:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a}{a^2+\omega^2}\right).$$

5.3. a) Theo công thức biến đổi Fourier ta có:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\frac{\sin a\omega}{\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

b) Theo hệ thức Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega.$$

Ta suy ra

$$\int_{-a}^{+a}1dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin a\omega}{\omega}\right)^2 d\omega.$$

Hay

$$2a=\frac{2a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)^2 d\omega.$$

Từ đó rút ra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=\pi\ .$$

5.4. Ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-g(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-g(x))(f(x)-g(x))*dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)f*(x)-g(x)f*(x)-f(x)g*(x)+g(x)g*(x))dx\,.$$

Theo đẳng Parseval, vế phải trên đây tương đương với:

$$\text{VP} = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)F^*(\omega) - G(\omega)F^*(\omega) - F(\omega)G^*(\omega) + G(\omega)G^*(\omega)]d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (F(\omega) - G(\omega))(F(\omega) - G(\omega))^* \mathrm{d}\,\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\, F(\omega) - G(\omega)\,|^2 d\omega\,.$$

5.5.a) Để tính $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}$ ta xét hàm $F(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2 + a^2}$. Từ bài tập 5.2 ta thấy đây là ảnh Fourier của hàm $f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-a|x|}}{a}$. Mặt khác, theo đẳng thức Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(\mathrm{x})|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega^2 + a^2}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a|x|}dx = \frac{\pi}{2a^2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{2ax}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2ax}dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{2a^2}\left[\left.\frac{e^{2ax}}{2a}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-2ax}}{2a}\right|_{0}^{+\infty}\right] = \frac{\pi}{2a^2}a\,\cdot$$

Vậy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}\,.$$

b) Xét hàm $F(\omega) = \dfrac{1}{2(\omega^2 + a^2)}$. Dễ thấy $F(\omega)$ là ảnh Fourier của hàm

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a|x|}}{2a}\,.$$

Mặt khác

$$F^{'}(\omega) = -\frac{\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}\,.$$

Theo đẳng thức Parseval và tính chất ảnh của đạo hàm ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F^{'}(\omega)\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{F}\{f'(\omega)\}\right|^2 dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|(ix)\mathcal{F}\{f(\omega)\}\right|^2 dx\,.$$

Thay vào ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2 d\omega}{(\omega^2+a^2)^4}=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2a}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-2a|x|}dx=\frac{\pi}{(2a)^5}\,.$$

5.6. Phương trình truyền nhiệt trên thanh là

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,,$$ trong đó k là hệ số truyền nhiệt.

Thực hiện biến đổi Fourier lên hai vế của phương trình trên ta được

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx=k\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dt\,.$$

Gọi $U(\omega, t)$ là ảnh Fourier của $u(x, t)$, khi đó

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t}=(i\omega)^2kU(\omega,t)=-\omega^2kU(\omega,t)\,.$$

Tích phân hai vế theo t ta có:

$$U(\omega,t)=c(\omega)e^{-\omega^2kt}\,,$$

với $c(\omega)$ là hằng số tích phân. Ta tìm hệ sô $c(\omega)$ dựa vào điều kiện đầu:

$$U(\omega,0)=c(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\,.$$

Ta dựa vào hàm $f(x)$ để xác định $c(\omega)$. Ví dụ:

$$f(x)=\begin{cases}a_0 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

ta tìm được

$$c(\omega)=a_0\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}dx=2a_0\frac{\sin\omega}{\omega}\,.$$

Từ đó

$$U(\omega, t) = 2a_0 \frac{\sin\omega}{\omega} e^{-\omega^2 kt}.$$

Theo biến đổi Fourier ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega,t) e^{i\omega x} d\omega = a_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{-\omega^2 kt} e^{i\omega x} d\omega.$$

5.7. a, b) Áp dụng công thức đạo hàm Laplace

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

ta đặt

$$A = \mathcal{L}\{t\sin\omega t\}; B = \mathcal{L}\{\mathrm{t}\cos\omega \mathrm{t}\}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{(t\sin\omega t)'\} = s\mathcal{L}\{t\sin\omega t\} - f(0) = s\mathcal{L}\{t\sin\omega t\} - 0 \\
&=> \mathcal{L}\{\sin\omega t + \omega t\cos\omega t\} = s\mathcal{L}\{t\sin\omega t\} \\
&=> \mathcal{L}\{\sin\omega t\} + \omega\mathcal{L}\{t\cos\omega t\} = s\mathcal{L}\{t\sin\omega t\} \\
&=> \mathcal{L}\{\sin\omega t\} + \omega B = sA
\end{aligned}$$

hay

$$sA - \omega B = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \tag{1}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t\cos\omega t)'\} &= s\mathcal{L}\{t\cos\omega t\} - f(0) = \mathrm{s}\,\mathcal{L}\{t\cos\omega t\} - 0 \\
&=> \mathcal{L}\{\cos\omega t - \omega t\sin\omega \mathrm{t}\} = s\mathcal{L}\{t\cos\omega t\} \\
&=> \mathcal{L}\{\cos\omega t\} - \omega\mathcal{L}\{\mathrm{t}\sin\omega \mathrm{t}\} = s\mathcal{L}\{\mathrm{t}\cos\omega \mathrm{t}\} \\
&=> \mathcal{L}\{\cos\omega t\} - \omega A = sB.
\end{aligned}$$

Hay

$$\omega A + sB = \frac{s}{\omega^2 + s^2}. \tag{2}$$

Từ các phương trình (1) và (2), ta tìm được *A* và *B*:

$$A=\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\ ;\ B=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\ ;$$

c, d) Tương tự như câu a) và b).

e, f) Sử dụng kết quả câu a) và b) để chứng minh.

5.8. *Hướng dẫn*: Ta phân tích các hàm ảnh thành các hàm đơn giản đã biết hàm gốc. Khi đó, sử dụng các biến đổi Laplace ngược ta tìm được các hàm gốc:

a) $F(s)=\dfrac{\pi}{(s+\pi)^2}$, $\Rightarrow f(x)=\pi x e^{-\pi x}$.

b) $F(s)=\dfrac{s-2}{s^2-4s+5}=\dfrac{s-2}{(s-2)^2+1}$, $\Rightarrow f(x)=e^{2x}\cos x$.

c) $F(s)=\dfrac{s}{(s+3)^2+1}=\dfrac{s+3}{(s+3)^2+1}-\dfrac{3}{(s+3)^2+1}$

$\Rightarrow f(\mathrm{x})=e^{-3x}\cos x-3e^{-3x}\sin x$.

d) $F(s)=\dfrac{6}{s^2-4s-5}=\dfrac{2\times 3}{(s-2)^2-3^2}$ $\Rightarrow f(x) = 2e^{2x}\mathrm{sh}3x$.

e) $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}$ $\Rightarrow f(x) = xe^{ax}$.

f) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-3)}=-\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s(s-3)}\right]$

$\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{3}\left[x-\dfrac{1}{3}(e^{3x}-1)\right]$.

g) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}=\dfrac{1}{2a}\dfrac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$ $\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2a}x\sin ax$.

h) $F(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ $\Rightarrow f(x)=x\cos ax$.

5.9. Dùng biến đổi Laplace giải bài toán Cauchy:

a) Áp biến đổi laplace lên hai vế ta có:

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{3\}$$

hay

$$[s^2Y(s) - sy_0 - y_0'] + Y(s) = \frac{3}{s}.$$

Do $y(0) = 0, y'(0) = 1$ nên ta tìm được ảnh Laplace:

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Thực hiện biến đổi ngược hàm ảnh, ta có nghiệm cần tìm:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = 3 - 3\cos t + \sin t.$$

b) Áp biến đổi Laplace lên hai vế ta đưa về được phương trình ảnh:

$$[s^2Y(s) - sy_0 - y_0'] - Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Sử dụng các điều kiện đầu $y(0) = 1, y'(0) = 1$ ta tu được ảnh Laplace:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s^2-1)} + \frac{s+1}{s^2-1} = \frac{2}{4(s-1)^3} - \frac{1}{4(s-1)^2} + \frac{1}{8(s-1)} - \frac{1}{8(s+1)} + \frac{1}{s-1}$$

Thực hiện biến đổi ngược hàm ảnh, ta có nghiệm cần tìm:

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t + \frac{9}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t}.$$

c) Áp biến đổi Laplace lên hai vế ta đưa về được phương trình ảnh:

$$s^3Y(s) - s^2y_0 - sy'_0 - y_0'' - 2[s^2Y(s) - sy_0 - y_0']$$

$$- sY(s) + y_0' + 2Y(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Sử dụng các điều kiện đầu $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$ ta tìm được ảnh Laplace:

$$Y(s) = \frac{2}{s^3 - 2s^2 + 2} + \frac{1}{(s+2)(s^3 - 2s^2 + 2)}.$$

Thực hiện biến đổi ngược ta tìm được nghiệm:

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{7}{6}e^{t} - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

d) $y(t) = \frac{1}{4}\left[1-\cos 2(t-1)\right]u(t-1)$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin^2(t-1) & (t>1) \\ 0 & (t<1) \end{cases}.$$

e) $y(t) = \frac{3}{2}\left(\sin t - t\cos t\right)u(t)$

$+3\left(\sin(t-\pi)-(t-\pi)\cos(t-\pi)\right)u(t-\pi)$,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}(\sin t - t\cos t) & 0<t<\pi \\ \frac{3}{2}(\sin t - t\cos t) + 3(-\sin t + (t-\pi)\cos t) & (t>\pi) \end{cases}$$

5.10.a) Ta thấy tích phân vế phải là tích chập của [$y(t)$*cos$t$] nên

$$y(t) = t + y(t)*\cos t.$$

Biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{y(t)*\cos t\}.$$

Suy ra:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s)*\frac{s}{s^2+1}$$

hay

$$Y(s)\left(1-\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

Từ đây ta rút ra được ảnh Laplace:

$$Y(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s^2-s+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{s-1}{s^2-s+1}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}.$$

Thực hiện biến đổi ngược (đồng thời sử dụng hàm ảnh của hàm lượng giác cùng công thức dịch chuyển ảnh) ta tìm được nghiệm:

$$y(t)=t+1-e^{\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t).$$

b) Ta có:

$$y(t)=te^t-2\int_0^t y(r)e^{t-r}dr.$$

Tương tự, ta thấy tích phân vế phải là tích chập của hàm $y(t)*e^t$. Do đó:

$$y(t) = te^t - 2y(t)*e^t.$$

Biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{te^t\}-2\mathcal{L}\{y(t)*e^t\}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^2}-2.Y(s)*\frac{1}{s-1}.$$

Từ đây ruy ra:

$$Y(s)=\frac{1}{s^2-1}.$$

Thực hiện biến đổi ngược ta có nghiệm cần tìm:

$$y(t) = sht.$$

c. Tương ta có:

$$Y(s)=5\frac{s}{s^2-1};\ y(t)=5cht.$$

5.11. Phương trình dao động của mạch điện:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=0,$$

với các điều kiện ban đầu:

$$q_0 = Q_0,\ q_0' = 0.$$

Lấy laplace hai vế ta có phương trình ảnh:

$$[s^2 Q(s) - sQ_0(s) - Q'_0]+\frac{1}{C}Q(s) = 0.$$

Sử dụng các điều kiện đầu ta rút ra hàm ảnh:

$$\text{Q(s)} = \frac{q_0 s}{s^2+\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}.$$

Thực hiện biến đổi Laplace ngược ta tìm được:

$$q(t)=q_0\cos\frac{t}{\sqrt{LC}},$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

5.12. Phương trình dao động của mạch là:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+50\frac{dq}{dt}+1000q=220\sin 100\pi t.$$

Áp biến đổi Laplace cả hai vế phương trình ta được phương trình ảnh:

$$\{s^2Q-sq(0)-q'(0)\}+50\{sQ-q(0)\}+1000Q=220\frac{100\pi}{s^2+(100\pi)^2},$$

trong đó:

$$Q=Q(s)=\mathcal{L}\{q(t)\},\ q(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}.$$

Thay các điều kiện đầu $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$) vào phương trình ảnh ta thu được nghiệm trong không gian ảnh:

$$Q(s) = \frac{22000\pi}{(s^2 + (100\pi)^2)(s^2 + 50s + 1000)}.$$

Phân tích ảnh thành các số hạng đơn giản rồi dùng biến đổi ngược ta có:

$$q(t) = \frac{120}{197}(2\sin 100\pi t - 3\cos 100\pi t) + \frac{120}{197}e^{-4t}(2\sin 100\pi t + 3\cos 100\pi t).$$

5.13. **a)** Chọn gốc tọa độ O tại vị trí cân bằng, chiều dương của trục O*x* hướng xuống dưới. Theo định luật II Newton ta có:

$$m\ddot{x} = mg - k\left(\Delta l_0 + x\right) - \gamma\dot{x}.$$

Tại vị trí cân bằng:

$$mg = k\Delta l_0.$$

Đặt: $\gamma/m = 2\beta$, ta được phương trình dao động của vật là:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

b) Áp biến đổi Laplace lên hai vế của phương trình dao động và chọn điều kiện ban đầu $x_0 = A$; $\dot{x}_0 = 0$ ta tìm được ảnh Laplace. Sau đó, thực hiện hiện biến đổi ngược ta được nghiệm:

$$x\left(t\right) = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t\right).$$

Chương 6:

6.1. Đáp số: $f'(1.0) = 3.0$ và $f''(1.0) = 6.0$.

6.2. Đáp số: $v = f'(11) = 11.1784$ và $a = f''(11) = 2.0865$.

6.3. Đáp số: $f'(1.1) = 0.62958$ và $f''(1.1) = 6.57500$.

6.4. Đáp số: I = 1.7506.

6.5. Đáp số: I = 0.9023.

6.6. Đáp số: I = 0.7854.

6.7. Đáp số: I = 0.9046.

6.8. Đáp số: I = 0.7854.

6.9. Đáp số: I = 2.32957.

6.10. Đáp số: $y(2.5) = 0.4761$.

6.11. Đáp số: $y(0.1) = 1.1053$.

6.12. Đáp số: $y(0.5) = 4.7$; $y(1) = 4.893$; $y(1.5) = 4.55$ và $y(2) = 4.052$.

6.13. Đáp số: $y(0) = 1$; $y(0.1) = 1$; $y(0.2) = 0.98$; $y(0.3) = 0.9416$;

$y(0.4) = 0.8884$ và $y(0.5) = 0.8253$.

6.14. Đáp số: $y(0.5) = 3.946$; $y(1) = 4.188$; $y(1.5) = 4.063$;

$y(2) = 3.764$.

6.15. Đáp số: $y(0) = 1$; $y(0.1) = 1$; $y(0.2) = 0.9800$; $y(0.3) = 0.9416$;

$y(0.4) = 0.8884$ và $y(0.5) = 0.8253$.

6.16. Đáp số:

a) $[x, y] =$

$= [0.1\ \ 1.00025, 0.2\ \ 1.00243, 0.3\ \ 1.00825, 0.4\ \ 1.01926, 0.5\ \ 1.03688]$,

b) $[x, y] =$

$= [0.1\ \ 1.0863, 0.2\ \ 1.1768, 0.3\ \ 1.2708, 0.4\ \ 1.3676, 0.5\ \ 1.4664]$.

6.17. Đáp số: $y(1.2) = 1.4028$.

6.18. Đáp số:

a) $y(0.5) = 4.069$; $y(1) = 4.32$ và $y(1.5) = 4.167$.

b) $y(0.2) = 0.9615$; $y(0.4) = 0.8621$; $y(0.6) = 0.7353$; $y(0.8) = 0.6098$;

$y(1.0) = 0.6$.

6.19. Đáp số: $y(0.2) = 1.196$ và $y(0.4) = 1.3752$.

6.20. **a)** $k = 0.8996$, $E(k) = 0.407$,

b) $k = 0.9052$, $E(k) = 0.486$. Trường hợp **b.** Phù hợp tốt hơn với số liệu thực nghiệm.

6.21. Đáp số:

$0.6208950 + 1.219621x$, với $S = 2.719\times10^{-5}$;

$0.5965807 + 1.253293x - 0.01085343x^2$, với $S = 1.801\times10^{-5}$;

$0.6290193 + 1.185010x + 0.03533252x^2 - 0.01004723x^3$; $S = 1.740\times10^{-6}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt:

[1] Tạ Văn Đĩnh, *Phương pháp tính*, **NXB Giáo Dục,2010**.

[2] Nguyễn Văn Hùng, Lê Văn Trực, *Phương pháp toán cho Vật lí*, **Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001**.

[3] Phan Quốc Khánh, *Toán chuyên đề*, **Nhà xuất bản ĐHQG TP Hồ Chí Minh, 2000**.

[4] Đỗ Đình Thanh (chủ biên), Vũ Văn Hùng, *Phương pháp Toán-Lí*, **Nhà xuất bản Giáo Dục, 2009**.

[5] Nguyễn Đình Trí, Nguyễn Trọng Thái, *Phương trình Vật lí-Toán*, **NXB Đại học& THCN, HàNội, 1977**.

Tiếng Anh:

[6] G.B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists, 5st*, **Academic Press, 2001**.

[7] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, **Wiley, 2003.**

[8] Tai L. Chow, *Mathematical Methods for Physicists - A concise introduction*, **Cambridge University Press, 2003**.

[9] G. W. Collins, *Fundamental Numerical Methods and Data Analysis*,**George W. Collins, 2003**.

[10] Rao V. Dukkipati, *Numerical Methods*, **New Age International Publishers, 2010.**

[11] Doug Faires, Dick Burden, *Numerical Methods*, 3rd, **Brooks Cole, 2002**.

[12] J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists 2nd*, **Marcel Dekker, 2001**.

[13] C. L. Lawson, R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems,* **SIAM, 1996.**

[14] Ken Riley, Michael Hobson, *Mathematical Methods for Physics and Enginering*,**Cambridge University Press, 2002**.

[15] J. L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, **Springer, 1999.**

[16] David Brandwood, *Fourier Transforms in Radar and Signal Processing*, Artech House**, 2003**.

[17] K. T. Tang, *Mathematical Methods for Engineers and Scientists,* **Springer, 2007.**

[18] E. J. Watson, *Laplace Transform and Applications*, **Van Nostrand Reinhold, 1981**

[19] J.Wolberg, *Data Analysis Using the Method of Least Squares* (Extracting the Most Information from Experiments), **Springer, 2006**.

[20] R. Wrede, M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Advanced Calculus, 2nd,* **McGraw-Hill, 2002**.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VINH
182 Lê Duẩn, Vinh, Nghệ An
Điện thoại: 038.3551345 - Fax: 038 3855269
Email: nxbdhv@gmail.com

GIÁO TRÌNH
PHƯƠNG PHÁP TOÁN LÍ

Chịu trách nhiệm nội dung
Hội đồng nghiệm thu
Trường Đại học Vinh

Người nhận xét:
TS. Đinh Phan Khôi
ThS. Mạnh Tuấn Hùng

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc: PGS.TS. Đinh Trí Dũng
Tổng biên tập: PGS.TS. Trần Văn Ân

Biên tập:
Bùi Đình Thuận

Trình bày:
Quang Minh

Sửa bản in:
Các tác giả

In 300 bản, khổ 16 x 24 cm
Tại Công ty cổ phần In Hà Tĩnh
Đăng ký kế hoạch xuất bản số: 1181- 2014/CXB/01-15/ ĐHV
Quyết định xuất bản số: 41/QĐXB-ĐHV ngày 12 tháng 8 năm 2014
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2014