ĐOÀN THẾ NGÔ VINH

Giáo trình

ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC

Vinh, 2010

Mục lục

Giới thiệu

Điện động lực là học thuyết về trường điện từ và sự liên hệ giữa nó với điện tích và dòng điện. Điện động lực học cổ điển được xét theo hai quan điểm vĩ mô và vi mô.

Điện động lực học vĩ mô nghiên cứu các hiện tượng điện từ không quan tâm tới tính gián đoạn của các điện tích và cấu trúc phân tử, nguyên tử của môi trường vật chất. Các vật thể được coi là các môi trường liên tục, và điện tích cũng được coi là phân bố liên tục trong không gian. Điện động lực học vĩ mô dựa trên hệ phương trình Maxwell, được xem như một tiên đề tổng quát, từ đó bằng suy luận logic và bằng phương pháp chứng minh toán học chặt chẽ để rút ra các kết luận khác về các hiện tượng điện từ.

Điện động lực học vi mô nghiên cứu các hiện tượng điện từ có xét đến cấu trúc phân tử, nguyên tử của môi trường vật chất và tính gián đoạn của các điện tích. Ở đây dựa trên hệ phương trình Maxwell – Lorentz để khảo sát. Phương pháp này cho phép giải thích được cơ cấu và hiểu được bản chất của nhiều hiện tượng điện từ mà điện động lực học vĩ mô chỉ có thể mô tả về mặt hình thức.

Điện động lực học vi mô có quan hệ với điện động lực học vĩ mô qua việc lấy trung bình các đại lượng điện từ vi mô để nhận được các đại lượng điện từ vĩ mô tương ứng.

Trong giáo trình này phần điện động lực học vĩ mô được trình bày trong năm chương đầu
Chương 1 Các phương trình cơ bản của trường điện từ.
Chương 2 Trường điện từ tĩnh.
Chương 3 Trường điện từ dừng.
Chương 4 Trường điện từ chuẩn dừng.
Chương 5 Sóng điện từ.
phần điện động lực học vi mô được trình bày trong hai chương cuối
Chương 6 Tương tác giữa điện tích và điện trường.
Chương 7 Điện môi và từ môi.

Để học được học phần này người học phải được trang bị các kiến thức cơ sở như toán cao cấp đặc biệt là giải tích véctơ, điện đại cương, cơ học đại cương, cơ học lý thuyết.

Mặc dù đã có rất nhiều cố gắng nhưng chắc giáo trình này sẽ không tránh khỏi các hạn chế. Tác giả chân thành cảm ơn các ý kiến đóng góp từ độc giả để giáo trình này ngày càng được hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến xin gửi về Đoàn Thế Ngô Vinh, Khoa Vật lý, Đại học Vinh, hoặc email: `doanvinhdhv@gmail.com`

TP Vinh, tháng 9 năm 2010.
Đoàn Thế Ngô Vinh

Chương 1

Các phương trình cơ bản của trường điện từ

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.1 Trường điện từ

Trường điện từ là khoảng không gian vật lý trong đó có tồn tại lực điện và lực từ. Tại mỗi điểm của trường điện từ được đặc trưng bởi bốn véctơ: véctơ cường độ điện trường $\vec{E}$, véctơ cảm ứng điện (còn gọi là véctơ điện dịch) $\vec{D}$, véctơ cường độ từ trường $\vec{H}$, véctơ cảm ứng từ $\vec{B}$. Bốn véctơ này là những hàm của tọa độ và thời gian, chúng không biến thiên một cách bất kỳ mà tuân theo những quy luật nhất định, những quy luật đó được mô tả dưới dạng các phương trình Maxwell mà ta sẽ nghiên cứu trong chương này.

1.1.2 Các đại lượng điện từ

Các đại lượng véctơ $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ và $\vec{B}$ nói chung là các hàm của tọa độ và thời gian, chúng xác định mọi quá trình điện từ ở trong chân không cũng như trong môi trường vật chất. Đối với môi trường đẳng hướng ta có:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{1.1}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{1.2}$$

Trong đó ε và μ tương ứng là hệ số điện thẩm và hệ số từ thẩm của môi trường, các hệ số này nói chung là những hàm của tọa độ, thời gian và cường độ của trường điện từ. Tuy nhiên để đơn giản chỉ xét trường hợp ε và μ là các hằng số.

Trong hệ đơn vị SI các đại lượng trên có đơn vị và thứ nguyên như sau:

$\vec{E}$	$\mathrm{Vm^{-1}}$	$[\mathrm{m.kg.s^{-3}.A^{-1}}]$
$\vec{D}$	$\mathrm{Cm^{-2}}$	$[\mathrm{m^{-2}.s.A}]$
$\vec{H}$	$\mathrm{Am^{-1}}$	$[\mathrm{m^{-1}.A}]$
$\vec{B}$	T	$[\mathrm{kg.s^{-2}.A^{-1}}]$
ε	$\mathrm{Fm^{-1}}$	$[\mathrm{m^{-3}.kg^{-1}.s^{4}.A^{2}}]$
μ	$\mathrm{Hm^{-1}}$	$[\mathrm{m.kg.s^{2}.A^{-2}}]$

Trong chân không $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}9.10^{-9}$ Fm^{-1}; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ Hm^{-1}. Thực nghiệm chứng tỏ rằng $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, c là vận tốc ánh sáng trong chân không[1]. Ngoài ra người ta còn định nghĩa:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \; ; \; \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$$

là hệ số điện môi tỷ đối và hệ số từ thẩm tỷ đối của môi trường. Chúng là những đại lượng không có thứ nguyên.

1.1.3 Điện tích

Trong điện động lực học vĩ mô điện tích được coi là phân bố liên tục trong không gian.

Nếu điện tích phân bố liên tục trong một thể tích V nào đó, ta định nghĩa mật độ điện tích khối tại mỗi điểm là:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{1.3}$$

Trong đó ΔV là thể tích nhỏ bất kỳ bao quanh điểm quan sát, Δq là lượng điện tích chứa trong thể tích đó. Đơn vị mật độ điện tích khối Cm^{-3}.

Nếu điện tích phân bố liên tục trên một mặt S nào đó ta định nghĩa mật độ điện tích mặt tại mỗi điểm là:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \tag{1.4}$$

trong đó ΔS là diện tích nhỏ bất kỳ bao quanh điểm quan sát, Δq là điện tích có ở trong ΔS. Đơn vị của mật độ điện tích mặt là Cm^{-2}.

Đối với điện tích điểm thì điện tích tập trung tại một điểm, mật độ điện tích bằng dần tới vô cùng tại nơi có điện tích điểm. Khi đó ta có thể biểu diễn mật độ điện tích dưới dạng hàm Delta[2] .

$$\rho = \sum q_i \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right) \tag{1.5}$$

$\vec{r}_i$ là bán kính véctơ của điện tích còn $\vec{r}$ là bán kính véctơ của điểm quan sát.

Do các định nghĩa trên, giá trị của điện tích nguyên tố có thể viết:

$$dq = \rho\, dV \tag{1.6}$$

$$dq = \sigma\, dS \tag{1.7}$$

1.1.4 Dòng điện

Trong điện động lực học vĩ mô dòng điện cũng được xem là phân bố liên tục trong không gian và đó là dòng chuyển dời có hướng của các điện tích.

Nếu dòng điện phân bố liên tục trong thể tích nào đó, ta định nghĩa mật độ dòng điện khối $\vec{j}$ tại mỗi điểm bằng hệ thức:

$$\vec{j} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \tag{1.8}$$

[1] vận tốc ánh sáng trong chân không xấp xỉ 3.10^8ms^{-1}

[2] Hàm Delta $\delta\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right) = \begin{cases} \infty & (\vec{r} = \vec{r}_i) \\ 0 & (\vec{r} \neq \vec{r}_i) \end{cases}$

trong đó ΔI là cường độ dòng điện chạy qua mặt nhỏ bất kỳ ΔS chứa điểm quan sát và vuông góc với phương của dòng điện tại điểm quan sát. Phương và chiều của véctơ $\vec{j}$ trùng với phương và chiều của dòng điện tại điểm quan sát. Đơn vị của mật độ dòng điện là Am^{-2}.

Nếu dòng điện được phân bố liên tục trên một mặt bất kỳ nào đó. Ta định nghĩa mật độ dòng điện mặt $\vec{i}$ tại mỗi điểm bằng hệ thức:

$$|\vec{i}| = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \tag{1.9}$$

trong đó ΔI là cường độ dòng điện mặt chạy qua một đoạn bất kỳ Δl chứa điểm quan sát và vuông góc với dòng điện tại điểm quan sát. Phương, chiều của véctơ $\vec{i}$ trùng với phương và chiều của dòng điện tại điểm quan sát.

Do các định nghĩa trên, giá trị của dòng điện nguyên tố là:

$$dI = \vec{j}\,d\vec{S} = j_n dS = jdS\cos\alpha \tag{1.10}$$

$$dI = \vec{i}\,d\vec{l} = i_n dl = idl\cos\alpha \tag{1.11}$$

α là góc hợp bởi véctơ $\vec{j}$ (hoặc véctơ $\vec{i}$) với pháp tuyến $\vec{n}$ của $d\vec{S}$ (hoặc $d\vec{l}$).

1.2 Định luật Coulomb

1.2.1 Định luật Coulomb

Lực tác dụng giữa hai điện tích điểm q và q' đặt trong môi trường đồng nhất có hệ số điện thẩm ε cho bởi

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qq'}{r^2} \tag{1.12}$$

r là khoảng cách giữa hai điện tích

Trên cơ sở lý thuyết trường tương tác giữa hai điện tích điểm q và q' có thể giải thích:

(a) điện tích điểm q tạo ra quanh nó điện trường có cường độ điện trường

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.13}$$

$\vec{r}$ là bán kính véctơ tính từ điện tích q đến điểm tính trường

(b) điện tích điểm q' đặt trong điện trường chịu tác dụng của lực

$$\vec{F} = q'\vec{E} \tag{1.14}$$

Có thể coi (1.14) là cách biểu diễn khác của định luật Coulomb, nó phù hợp với nguyên lý tác dụng gần, đúng cho mọi trường hợp và không phụ thuộc vào nguyên nhân gây ra điện trường $\vec{E}$. Còn (1.12) phù hợp với nguyên lý tác dụng xa, biểu diễn tương tác tức thời giữa hai điện tích và chỉ đúng trong trường hợp các điện tích chuyển động chậm và khoảng cách giữa chúng không lớn lắm.

Theo (1.13) cường độ điện trường phụ thuộc vào phân bố điện tích trong không gian và hệ số điện thẩm của môi trường. Để thuận tiện tính toán người ta đưa vào véctơ cảm ứng điện hay véctơ điện dịch theo (1.1). Đối với điện tích điểm q ta có

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.15}$$

Véctơ cảm ứng điện chỉ phụ thuộc vào phân bố điện tích trong không gian mà không phụ thuộc tính chất của môi trường.

1.2.2 Dạng vi phân của định luật tĩnh điện Gauss

Giả sử trong mặt kín S có một lượng điện tích q. Theo định luật tĩnh điện Gauss ta có

$$N = \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q \tag{1.16}$$

N là thông lượng của véctơ cảm ứng điện $\vec{D}$ gửi qua mặt kín S. Ta có $q = \int dq = \int_V \rho\, dV$ nên (1.16) trở thành

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$$

Mặt khác $\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{D}\, dV$ nên $\int_V \mathrm{div}\vec{D}\, dV = \int_V \rho\, dV$. Do mặt S và thể tích V do nó bao bọc được chọn bất kỳ nên

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{1.17}$$

đó là dạng vi phân của định luật tĩnh điện Gauss.

Từ (1.17) nếu trong thể tích V nào đó mà $\rho = 0$ thì thông lượng của véctơ cảm ứng điện gửi qua mặt kín S bao thể tích V bằng không, nghĩa là đường sức của véctơ $\vec{D}$ không bắt đầu và cũng không kết thúc trong V. Tại những điểm có $\rho \neq 0$ thì đường sức của véctơ $\vec{D}$ bắt đầu ($\rho > 0$) hoặc kết thúc ($\rho < 0$) tại đó. Như vậy mật độ điện tích ρ là nguồn của véctơ $\vec{D}$

1.3 Định luật dòng toàn phần

1.3.1 Định luật bảo toàn điện tích

Xét thể tích V không đổi được giới hạn bởi mặt kín S không đổi, trong đó chứa điện tích $q = \int_V \rho\, dV$. Giả sử điện tích trong V thay đổi theo thời gian, trong đơn vị thời gian nó biến đổi một lượng

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

Điện tích được bảo toàn nên phải có dòng điện tích (dòng điện) chảy qua mặt kín S. Dòng điện chảy vào nếu điện tích trong V tăng, chảy ra nếu điện tích trong V giảm. Xét nguyên tố mặt dS trên mặt kín S. Trong đơn vị thời gian điện lượng chảy qua dS (chính là cường độ dòng điện chảy qua dS) là $dI = \rho\vec{v}\, d\vec{S} = \vec{j}\, d\vec{S}$. Với $\vec{v}$ là vận tốc của điện tích tại dS. Do đó

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \tag{1.18}$$

Điện lượng chảy qua mặt kín S trong đơn vị thời gian là

$$I = \int dI = \oint_S \rho\vec{v}\, d\vec{S} = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

Do chiều dương của mặt S hướng từ trong ra ngoài nên cường độ dòng điện là dương khi chảy từ trong ra ngoài và âm khi chảy từ ngoài vào trong. Định luật bảo toàn điện tích viết dạng

$$\frac{dq}{dt} = -I$$

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

Mặt khác $\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{j}\, dV$ do đó $\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV = -\int_V \mathrm{div}\vec{j}\, dV$. Do thể tích V bất kỳ nên ta có

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j}$$

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{1.19}$$

Tại một điểm nào đó điện tích biến đổi theo thời gian thì phải có dòng điện chảy tới điểm đó hoặc từ điểm đó chảy đi. (1.19) là dạng vi phân của định luật bảo toàn điện tích, còn gọi là *phương trình liên tục*.

1.3.2 Dòng điện dịch

Đối với dòng điện không đổi thì mật độ điện tích tại mỗi điểm không phụ thuộc vào thời gian do đó (1.19) trở thành $\mathrm{div}\vec{j} = 0$, nghĩa là đường sức của véctơ $\vec{j}$ khép kín, không có điểm đầu và không có điểm kết thúc.

Đối với dòng điện biến đổi $\mathrm{div}\vec{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$. Đường sức của véctơ $\vec{j}$ không khép kín mà xuất phát hoặc kết thúc ở những nơi có mật độ điện tích biến đổi theo thời gian.

Xét một mạch điện có tụ điện, đối với dòng điện không đổi đường sức của nó khép kín nên dòng điện không đổi không thể chạy trong mạch này. Còn dòng điện biến đổi có thể chảy qua mạch này, đường sức của nó bắt đầu và kết thúc ở hai bản tụ điện, nơi có điện tích thay đổi theo thời gian. Do véctơ $\vec{j}$ liên quan tới sự chuyển động của điện tích nên gọi nó là mật độ dòng điện dẫn. Giữa hai bản tụ không có điện tích chuyển động nên không có dòng điện dẫn, nhưng dòng điện vẫn chạy trong mạch. Do đó cần giả thiết tồn tại quá trình nào đó giữa hai bản tụ tương đương với sự có mặt của dòng điện dẫn. Người ta nói giữa hai bản tụ tồn tại *dòng điện dịch*. Nó có nhiệm vụ khép kín dòng điện dẫn trong mạch.

Ta tìm biểu thức của dòng điện dịch. Đạo hàm (1.17) theo thời gian được $\mathrm{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j}$ hay

$$\mathrm{div}\Big(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\Big) = 0 \tag{1.20}$$

Từ (1.20) ta có $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ có thứ nguyên như của $\vec{j}$ (thứ nguyên mật độ dòng điện). Do đó $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ gọi là *véctơ mật độ dòng điện dịch*. $\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right)$ là véctơ có đường sức khép kín và gọi là *véctơ mật độ dòng toàn phần*.

Như vậy trường của dòng điện toàn không có nguồn, nghĩa là các đường sức của dòng toàn phần phải là những đường khép kín hoặc đi ra vô cực. Do đó, nơi nào các đường sức của dòng điện dẫn gián đoạn thì các đường sức của dòng điện dịch nối tiếp ngay với chúng. Mặc dù dòng điện dẫn và dòng điện dịch có tên gọi "dòng điện" như nhau, nhưng chúng là những khái niệm vật lý khác nhau. Đặc trưng tổng quát duy nhất của chúng là ở chỗ là chúng đã gây ra từ trường như nhau. Dòng điện dịch và dòng điện dẫn có bản chất vật lý hoàn toàn khác nhau. Dòng điện dẫn tương ứng với sự chuyển động của các điện tích, còn dòng điện dịch tương ứng với sự biến thiên của cường độ điện trường và không liên quan đến sự chuyển động của điện tích hay bất cứ hạt vật chất nào khác.

1.3.3 Dạng vi phân của định luật dòng toàn phần

Đối với dòng điện không đổi định luật dòng toàn phần[3] được phát biểu "*Lưu thông cường độ từ trường quanh đường cong kín $\mathcal{L}$ bằng tổng đại số các dòng điện xuyên qua đường cong kín đó*".

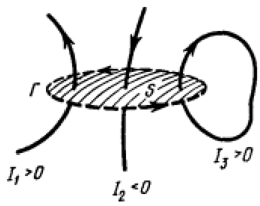
Dạng toán học

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H}\, d\vec{l} = I \tag{1.21}$$

I là tổng đại số các dòng điện xuyên qua đường cong kín, chiều dương của đường cong hợp với chiều dương dòng điện theo quy tắc vặn nút chai (Hình 1.1). Ta có

$$I = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{H}\, d\vec{S}$$



Hình 1.1:

do đó (1.21) viết lại

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{H}\, d\vec{S} = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

Do mặt S là bất kỳ nên

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} \tag{1.22}$$

(1.22) là dạng vi phân của định luật dòng toàn phần đối với dòng điện không đổi.

Đối với dòng biến đổi ngoài dòng điện dẫn còn có dòng điện dịch. Dòng điện dịch này cũng gây ra xung quanh nó một từ trường xoáy như dòng diện dẫn bằng nó. Vì vậy (1.22) cần tổng quát hoá dạng

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.23}$$

(1.23) là dạng vi phân của định luật dòng toàn phần, nó có ý nghĩa vật lý: *giống như dòng điện dịch sự biến thiên của điện trường theo thời gian cũng sinh ra từ trường xoáy.*

[3]Định lý Ampere

1.4 Nguyên lý về tính liên tục của từ thông

Đường sức từ trường là liên tục nghĩa là nó không có điểm xuất phát và điểm kết thúc. Xét mặt kín S bất kì thì số đường sức đi vào mặt S phải bằng số đường sức đi ra khỏi mặt S. Nghĩa là tổng đại số các đường sức xuyên qua mặt kín S bằng 0. Hay

$$\phi = \oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \tag{1.24}$$

(1.24) biểu diễn nguyên lý về tính liên tục của từ thông

Ta có $\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = \oint_V \mathrm{div}\vec{B}\, dV = 0$ nên

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{1.25}$$

(1.25) là dạng vi phân của nguyên lý về tính liên tục của từ thông.

So sánh (1.25) với (1.17) dễ dàng thấy được sự khác nhau giữa điện trường và từ trường. *Đường sức của véctơ $\vec{D}$ không liên tục, nguồn của nó là các điện tích tự do. Còn đường sức của véctơ $\vec{B}$ là liên tục.*

1.5 Định luật cảm ứng điện từ Faraday

Xét diện tích S bất kỳ giới hạn bởi đường cong kín $\mathcal{L}$. Nếu từ thông qua S biến thiên theo thời gian thì trên $\mathcal{L}$ xuất hiện suất điện động cảm ứng.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \tag{1.26}$$

$\mathcal{E}$ là suất điện động cảm ứng xuất hiện trên đường cong kín $\mathcal{L}$. Chiều dương của $\mathcal{L}$ và chiều dương của mặt S chọn theo quy tắc vặn nút chai. Dấu trừ chỉ chiều của suất điện động cảm ứng. ϕ là thông lượng của véctơ cảm ứng từ $\vec{B}$ qua mặt S, được tính theo (1.24).

Mặt khác suất điện động cảm ứng bằng công lực điện $\vec{F}$ dịch chuyển điện tích dương bằng đơn vị dọc theo $\mathcal{L}$ đúng một vòng. $\vec{F} = q\vec{E} = (+1)\vec{E}$ nên

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{F}\, d\vec{l} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\, d\vec{l}$$

Do đó (1.26) trở thành

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{S} \tag{1.27}$$

Áp dụng định lý Stokes ta có

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}\, d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

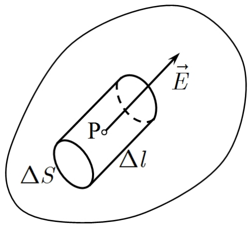
Do S bất kì nên

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.28}$$

Nếu từ trường biến thiên theo thời gian thì nó sẽ gây ra một điện trường xoáy. (1.28) là dạng vi phân của định luật cảm ứng điện từ Faraday.

1.6 Định luật Ohm và định luật Joule – Lentz

1.6.1 Dạng vi phân của định luật Ohm



Hình 1.2:

Định luật Ohm đối với đoạn dây dẫn có dạng

$$\Delta\varphi = IR \tag{1.29}$$

$\Delta\varphi$ là hiệu điện thế hai đầu dây, R là điện trở của dây và I là cường độ dòng điện chảy qua dây. Gọi λ là điện dẫn suất ta có $R = \frac{l}{\lambda S}$, l và S là chiều dài và tiết diện của dây.

Xét một điểm P trong lòng vật dẫn tại đó có cường độ điện trường $\vec{E}$. Lấy hình trụ vô cùng nhỏ bao quanh P sao cho đường sinh song song với $\vec{E}$, chiều dài và tiết diện hình trụ là Δl và ΔS (Hình 1.2). Hình trụ vô cùng nhỏ nên trong đó có thể coi $\vec{E}$, I, λ là không đổi. Áp dụng định luật Ohm cho đoạn dây hình trụ.

$$\Delta\varphi = IR = I\frac{\Delta l}{\lambda\Delta S}$$

Mặt khác $I = j\Delta S$; $\Delta\varphi = E\Delta l$, nên ta có $j = \lambda E$ hay

$$\vec{j} = \lambda\vec{E} \tag{1.30}$$

(1.30) là dạng vi phân của định luật Ohm.

1.6.2 Dạng vi phân của định luật Joule – Lentz

Định luật Joule – Lentz đối với đoạn dây dẫn có dạng

$$\Delta Q = I^2 R\Delta t \tag{1.31}$$

ΔQ là nhiệt lượng toả ra trên dây trong thời gian Δt. Xét một điểm P trong lòng vật dẫn tại đó có véctơ mật độ dòng điện $\vec{j}$. Xét hình trụ vô cùng bé bao quanh điểm P tương tự như mục trước trong đó có thể coi $\vec{j}$, λ là không đổi. Ta có

$$\Delta Q = (j\Delta S)^2\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta l}{\Delta S}\right)\Delta t = j^2\,\frac{\Delta V\,\Delta t}{\lambda}$$

Với ΔV là thể tích hình trụ nhỏ, gọi $q = \frac{\Delta Q}{\Delta V.\Delta t} = \frac{j^2}{\lambda}$ là nhiệt lượng toả ra trên một đơn vị thể tích trong một đơn vị thời gian

$$q = \vec{j}\vec{E} \tag{1.32}$$

(1.32) là dạng vi phân của định luật Joule – Lentz

1.7 Hệ phương trình Maxwell

1.7.1 Hệ phương trình Maxwell dạng vi phân

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.33}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.34}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{1.35}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{1.36}$$

1.7.2 Hệ phương trình Maxwell dạng tích phân

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{S} \tag{1.37}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H}\, d\vec{l} = I + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\, d\vec{S} \tag{1.38}$$

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q \tag{1.39}$$

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \tag{1.40}$$

Các phương trình Maxwell trên cùng với các phương trình liên hệ

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

tạo thành *hệ đủ các phương trình Maxwell*

1.7.3 Ý nghĩa và điều kiện áp dụng

Các phương trình (1.33) và (1.37) diễn tả định luật cảm ứng điện từ Faraday, các phương trình (1.34) và (1.38) diễn tả định luật dòng toàn phần. Các phương trình trình trên còn diễn tả mối quan hệ giữa điện trường và từ trường: điện trường biến thiên theo thời gian sinh ra từ trường xoáy và ngược lại từ trường biến thiên theo thời gian cũng sinh ra điện trường xoáy.

Các phương trình (1.35) và (1.39) diễn tả định luật tĩnh điện Gauss, chúng cũng cho biết đường sức của véctơ cảm ứng điện xuất phát hoặc kết thúc ở điện tích

Các phương trình (1.36) và (1.40) có nghĩa là đường sức của véctơ cảm ứng từ không có điểm xuất phát hoặc kết thúc, chúng khép kín hoặc đi xa vô tận

Hệ đủ các phương trình Maxwell cho phép xác định được trạng thái của trường điện từ một cách đơn giá.

Điều kiện áp dụng

- Các vật thể đứng yên hoặc chuyển động chậm trong điện từ trường.
- ε; μ không phụ thuộc thời gian và các véctơ đặc trưng cho từ trường.
- Trong điện từ trường không có nam châm vĩnh cửu hoặc sắt từ.

1.8 Năng lượng của trường điện từ

Thực nghiệm cho biết muốn tạo ra trường điện từ cần tiêu tốn một năng lượng nhất định. Ngược lại trường điện từ cũng có khả năng cung cấp năng lượng (ví dụ nhiệt năng...). Ta sẽ khảo sát về mặt lý thuyết điện từ trường có năng lượng không và năng lượng của trường điện từ được bảo toàn như thế nào.

Nếu trường điện từ có năng lượng thì năng lượng đó sẽ phân bố liên tục trong không gian với mật độ năng lượng w. Nói chung w là hàm của toạ độ và thời gian. Năng lượng trường điện từ trong thể tích V bất kỳ là

$$W = \int_V w\, dV$$

Giả sử năng lượng trường điện từ được bảo toàn thì nó phải tuân theo một định luật có dạng toán học là phương trình liên tục. Đặt $\vec{P}$ là véctơ mật độ dòng năng lượng thì ta phải viết được phương trình định luật bảo toàn năng lượng dạng

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{P} = 0 \tag{1.41}$$

Xuất phát từ hệ phưng trình Maxwell ta sẽ tìm lại (1.41). Ta có

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{H}\mathrm{rot}\vec{E} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow -\vec{E}\mathrm{rot}\vec{H} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} = 0$$

Cộng từng vế hai phương trình trên ta có

$$\vec{H}\mathrm{rot}\vec{E} - \vec{E}\mathrm{rot}\vec{H} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} = 0$$

Mặt khác

$$\vec{H}\mathrm{rot}\vec{E} - \vec{E}\mathrm{rot}\vec{H} = \mathrm{div}[\vec{E}\times\vec{H}\,];$$
$$\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\varepsilon\vec{E}^2)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\vec{D}\,);$$
$$\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{H}\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\mu\vec{H}^2)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\vec{H}\,)$$

Do đó

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2}\Big) + \mathrm{div}[\vec{E}\times\vec{H}\,] + \vec{j}\vec{E} = 0 \tag{1.42}$$

Ba số hạng vế trái (1.42) phải có cùng một thứ nguyên.

Thứ nguyên số hạng thứ ba là

$$\frac{\text{năng lượng}}{\text{(thể tích).(thời gian)}} = \frac{\text{mật độ năng lượng}}{\text{thời gian}}$$

Vì vậy hai số hạng đầu cũng phải có thứ nguyên như vậy, do đó:

Số hạng $\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})$ phải có thứ nguyên mật độ năng lượng. Ta gọi

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) \tag{1.43}$$

là mật độ năng lượng trường điện từ

Số hạng $[\vec{E} \times \vec{H}]$ phải có thứ nguyên

$$\frac{\text{(mật độ năng lượng).(độ dài)}}{\text{thời gian}} = \text{(mật độ năng lượng).(vận tốc)}$$

người ta gọi nó là véctơ mật độ dòng năng lượng, còn gọi là véctơ Umôp - Poynting

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] \tag{1.44}$$

Phương trình (1.42) trở thành

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{P} + \vec{j}\vec{E} = 0 \tag{1.45}$$

Lấy tích phân theo thể tích bất kì V

$$\frac{d}{dt}\int_V w\,dV + \int_V \mathrm{div}\vec{P}\,dV + \int_V \vec{j}\vec{E}\,dV = 0$$

$$\frac{dW}{dt} + \oint_S \vec{P}\,d\vec{S} + Q = 0 \tag{1.46}$$

Nếu năng lượng điện từ trường trong V biến thiên theo thời gian thì phải có dòng năng lượng chảy qua mặt kín S bao thể tích V và phải có nhiệt lượng Joule – Lentz toả ra trên V

Nếu chỉ có điện từ trường, không có dòng điện ($\vec{j} = 0$)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{P} = 0 \tag{1.47}$$

Tại một điểm bất kì, nếu mật độ năng lượng điện từ trường thay đổi theo thời gian thì phải có một dòng năng lượng từ nơi khác chảy đến hoặc từ điểm đó chảy đi.

Như vậy *năng lượng của trường điện từ được bảo toàn, nó được chuyển từ nơi này đến nơi khác hoặc chuyển hóa thành nhiệt lượng Joule – Lentz.*

1.9 Xung lượng của trường điện từ

Xét vật có thể tích V bất kỳ mang điện tích tương tác với trường điện từ, ngoài ra không có tương tác nào khác. Lực Lorentz tác dụng lên nguyên tố thể tích dV mang điện tích $\rho\,dV$ chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong điện từ trường

$$d\vec{F} = \rho\vec{E}\,dV + [(\rho\vec{v}\,dV) \times \vec{B}]$$

Định nghiã mật độ lực Lorentz

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\vec{E} + [\rho\vec{v} \times \vec{B}] \tag{1.48}$$

Để ý $\rho\vec{v} = \vec{j} = \text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$; $\rho = \text{div}\vec{D}$ nên

$$\vec{f} = \vec{E}\,\text{div}\vec{D} + \left[\left(\text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \times \vec{B}\right]$$

Mặt khác $\text{div}\vec{B} = 0$; $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\vec{D} \times \vec{B}\,] = \left[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \times \vec{B}\right] + \left[\vec{D} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \times \vec{B}\right] + [\text{rot}\vec{E} \times \vec{D}\,]$$
$$-\left[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \times \vec{B}\right] = [\text{rot}\vec{E} \times \vec{D}\,] - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{D} \times \vec{B}\,]$$

do đó

$$\vec{f} = \vec{E}\,\text{div}\vec{D} + \vec{H}\,\text{div}\vec{B} + [\text{rot}\vec{E} \times \vec{D}\,] + [\text{rot}\vec{H} \times \vec{B}\,] - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{D} \times \vec{B}\,] \tag{1.49}$$

Chiếu (1.49) lên trục Ox

$$f_x = E_x\text{div}\vec{D} + H_x\text{div}\vec{B} + [\text{rot}\vec{E} \times \vec{D}\,]_x + [\text{rot}\vec{H} \times \vec{B}\,]_x - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{D} \times \vec{B}\,]_x \tag{1.50}$$

Dễ thấy 4 số hạng đầu của vế phải (1.50) là dive của véctơ $\vec{X}$

$$\vec{X}\Big(E_xD_x + H_xB_x - \frac{1}{2}(\vec{E}.\vec{D} + \vec{H}.\vec{B});\;\; E_yD_y + H_xB_y;\;\; E_xD_z + H_xB_z\Big)$$

(1.50) viết lại

$$f_x = \text{div}\vec{X} - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{D} \times \vec{B}\,]_x \tag{1.51}$$

Trong chân không $[\vec{D} \times \vec{B}\,] = \varepsilon_0\mu_0[\vec{E} \times \vec{H}\,] = \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]$ nên lực tác dụng lên thể tích V theo phương Ox

$$F_x = \int_V f_x\,dV = \int_V \text{div}\vec{X}\,dV - \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]_x\,dV$$

Áp dụng định lý Ostrogradsky – Gauss

$$\int_V f_x\,dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]_x\,dV = \oint_S \vec{X}\,d\vec{S} \tag{1.52}$$

Chọn S là mặt bao toàn bộ điện từ trường và điện tích. Trên mặt S đó $\vec{E} = \vec{D} = \vec{B} = \vec{H} = 0$, do đó (1.52) trở thành

$$\int_V f_x\,dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]_x\,dV = 0 \tag{1.53}$$

Tương tự khi chiếu (1.49) lên trục Oy và Oz

$$\int_V f_y\,dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]_y\,dV = \oint_S \vec{Y}\,d\vec{S} \tag{1.54}$$
$$\int_V f_z\,dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]_z\,dV = \oint_S \vec{Z}\,d\vec{S} \tag{1.55}$$

Với các vectơ $\vec{Y}$ và $\vec{Z}$ cho bởi

$$\vec{Y}\big(E_yD_x + H_yB_x;\;\; E_yD_y + H_yB_y - \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B});\;\; E_yD_z + H_yB_z\big)$$

$$\vec{Z}\big(E_zD_x + H_zB_x;\;\; E_zD_y + H_zB_y;\;\; E_zD_z + H_zB_z - \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})\big)$$

Chọn S là mặt bao toàn bộ điện từ trường và điện tích

$$\int_V f_y\, dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]_y\, dV = 0 \tag{1.56}$$

$$\int_V f_z\, dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]_z\, dV = 0 \tag{1.57}$$

(1.53), (1.56) và (1.57) viết gộp lại dạng một phương trình véctơ

$$\int_V \vec{f}\, dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]\, dV = 0 \tag{1.58}$$

Gọi $\vec{G}_h$ là xung lượng toàn phần của các hạt điện tích trong V

$$\frac{d}{dt}\vec{G}_h = \vec{F} = \int_V \vec{f}\, dV$$

(1.58) trở thành

$$\frac{d}{dt}\Big(\vec{G}_h + \int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]\, dV\Big) = 0$$

hay

$$\vec{G}_h + \int_V \frac{1}{\mathrm{c}^2}[\vec{E} \times \vec{H}\,]\, dV = \overrightarrow{\mathrm{const}} \tag{1.59}$$

Đặt

$$\vec{G}_t = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\int_V [\vec{E} \times \vec{H}\,]\, dV \tag{1.60}$$

thì nó phải có thứ nguyên xung lượng, người ta gọi nó là *xung lượng của trường điện từ* trong thể tích V. (1.59) có thể viết lại

$$\vec{G}_h + \vec{G}_t = \overrightarrow{\mathrm{const}} \tag{1.61}$$

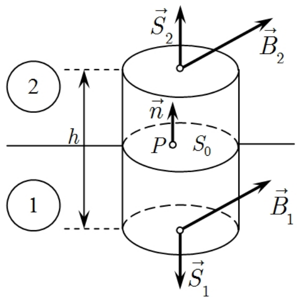
Đối với hệ cô lập chỉ có điện từ trường tương tác với các điện tích thì xung lượng tổng cộng của các hạt tích điện và xung lượng của trường điện từ là đại lượng không đổi.

1.10 Các điều kiện biên

Các phương trình Maxwell chỉ áp dụng được trong môi trường vật chất liên tục, trong đó đại lượng ε, μ là các hằng số hoặc là hàm của toạ độ nhưng biến thiên liên tục từ điểm này sang điểm khác. Trong trường hợp những môi trường không liên tục, tại mặt giới hạn giữa chúng đại lượng ε, μ biến đổi không liên tục và các véctơ $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ cũng biến đổi không liên tục. Các phương trình xác định sự biến thiên của các véctơ đó tại các mặt giới hạn gọi là *các điều kiện biên*.

1.10.1 Điều kiện biên của véctơ $\vec{B}$

Xét một điểm P bất kì ở mặt phân cách hai môi trường 1 và 2, quy ước pháp tuyến mặt phân cách hướng từ môi trường 1 sang môi trường 2. Lấy một một hình trụ vô cùng nhỏ chưa điểm P có trục song song với pháp tuyến tại P, đáy S_1 nằm trong môi trường 1 và đáy S_2 nằm trong môi trường 2 (Hình 1.3). Ta có



Hình 1.3:

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B}_1\, d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B}_2\, d\vec{S}_2 + \int_{S_{\text{xq}}} \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

Do hình trụ vô cùng nhỏ nên có thể coi véctơ $\vec{B}$ là không đổi trên các mặt đáy, và giới nội trên mặt xung quanh.

$$\int_{S_1} \vec{B}_1\, d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B}_2\, d\vec{S}_2 + \int_{S_{\text{xq}}} \vec{B}\, d\vec{S} = -B_{1n}S_1 + B_{2n}S_2 + \overline{B}S_{\text{xq}} = 0$$

Cho chiều cao hình trụ $h \to 0$ thì $S_1 \to S_0; S_2 \to S_0; S_{\text{xq}} \to 0$ khi đó

$$B_{2n}S_0 - B_{1n}S_0 = 0$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \tag{1.62}$$

Dạng véctơ

$$\vec{n}.(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{1.63}$$

1.10.2 Điều kiện biên của véctơ $\vec{D}$

Lập luận tương tự như đối với véctơ $\vec{B}$, ta có $\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q$, với q là điện tích trong hình trụ.

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}_1\, d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{D}_2\, d\vec{S}_2 + \int_{S_{\text{xq}}} \vec{D}\, d\vec{S} = -D_{1n}S_1 + D_{2n}S_2 + \overline{D}S_{\text{xq}} = q$$

Cho chiều cao hình trụ $h \to 0$ thì $D_{2n}S_0 - D_{1n}S_0 = q_m$ hay $D_{2n} - D_{1n} = \frac{q_m}{S_0}$. Do $\dfrac{q_m}{S_0} = \sigma$ nên

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{1.64}$$

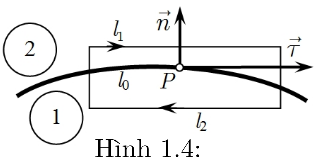
Dạng véctơ

$$\vec{n}.(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\,) = \sigma \tag{1.65}$$

σ là mật độ điện tích mặt tại mặt phân cách

1.10.3 Điều kiện biên của véctơ $\vec{E}$

Xét một điểm P bất kì ở mặt phân cách hai môi trường 1 và 2, pháp tuyến của mặt phân cách tại P là $\vec{n}$ hướng từ môi trường 1 sang môi trường 2. $\vec{\tau}$ là véctơ là tiếp tuyến tại P. Xét hình chữ nhật vô cùng nhỏ chứa điểm P nằm trong mặt phẳng tạo bởi $\vec{n}$ và $\vec{\tau}$. Hai cạnh l_1 và l_2 của hình chữ nhật song song với mặt phân



Hình 1.4:

cách và lần lượt nằm trong môi trường 1 và môi trường 2. giao tuyến giữa mặt phân cách và hình chữ nhật là l_0 (Hình 1.4).

Sử dụng phương trình (1.37) lấy tích phân hai vế trên diện tích S của hình chữ nhật $\int_S \mathrm{rot}\vec{E}\, d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$. Áp dụng định lý Stokes

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}\, d\vec{S} = \oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{E}_1\, d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{E}_2\, d\vec{l}_2 + \int_{l_b} \vec{E}\, d\vec{l}$$

Vì hình chữ nhật vô cùng nhỏ nên có thể coi $\vec{E}$ không đổi trên hai cạnh l_1 và l_2 của hình chữ nhật, trên các cạnh bên $\vec{E}$ giới nội và giá trị trung bình trên cạnh bên là $\bar{E}$, trên diện tích S véctơ $\vec{B}$ cũng giới nội và giá trị trung bình trên diện tích S là $\bar{B}$.

$$\int_{l_1} \vec{E}_1\, d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{E}_2\, d\vec{l}_2 + \int_{l_b} \vec{E} d\vec{l} = E_{2t}l_2 - E_{1t}l_1 + \overline{E}l_b$$

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}.S$$

do đó

$$E_{2t}l_2 - E_{1t}l_1 + \bar{E}l_b = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}.S$$

Cho cạnh bên hình chữ nhật $l_b \to 0$ thì $l_1 \to l_0; l_2 \to l_0; l_\mathrm{b} \to 0$; $S \to 0$ khi đó $E_{2t}l_0 - E_{1t}l_0 = 0$ hay

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \tag{1.66}$$

Dạng véctơ

$$[\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1\,)\,] = 0 \tag{1.67}$$

1.10.4 Điều kiện biên của véctơ $\vec{H}$

Lập luận tương tự như đối với véctơ $\vec{E}$. Lấy tích phân hai vế phương trình (1.34) trên diện tích S của hình chữ nhật kết quả

$$H_{2t}l_2 - H_{1t}l_1 + \overline{H}l_b = I + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}S$$

Cho cạnh bên hình chữ nhật $l_b \to 0$ thì $l_1 \to l_0; l_2 \to l_0; l_\mathrm{b} \to 0$; $S \to 0$ khi đó $H_{2t}l_0 - H_{1t}l_0 = I_m$ hay $H_{2t} - H_{1t} = \frac{I_m}{l_0}$. Vậy

$$H_{2t} - H_{1t} = i_m \tag{1.68}$$

i_m là mật độ dòng điện mặt tại mặt phân cách giữa hai môi trường

Dạng véctơ

$$\left[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\right] = \vec{i}_m \tag{1.69}$$

Chương 2

Trường điện từ tĩnh

2.1 Các phương trình của trường điện từ tĩnh

2.1.1 Định nghĩa trường điện từ tĩnh

Trường điện từ tĩnh là trường điện từ thoả mãn hai điều kiện

(a) Các đại lượng điện từ không biến đổi theo thời gian

(b) Các điện tích không chuyển động

2.1.2 Các phương trình của trường điện từ tĩnh

Áp dụng các phương trình Maxwell cho trường điện từ tĩnh với các đạo hàm riêng theo thời gian bằng không và $\vec{j} = 0$ và có thể chia thành hai nhóm:

(a) Nhóm phương trình của trường điện tĩnh

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{2.2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{2.3}$$

(b) Nhóm phương trình trường từ tĩnh

$$\mathrm{rot}\vec{H} = 0 \tag{2.4}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{2.5}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{M}_0 \tag{2.6}$$

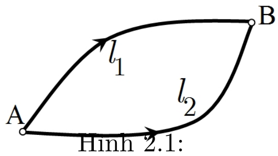
trong đó $\vec{M}_0$ là véctơ không đổi theo thời gian xuất hiện do môi trường tự phát sinh từ trường phụ ngay cả khi không có trường ngoài tác dụng lên chúng

Trường điện tĩnh là điện trường của điện tích đứng yên, từ trường tĩnh là từ trường của các nam châm vĩnh cửu. Trường tĩnh điện và trường tĩnh từ không có quan hệ với nhau.

Đối với điện trường $\vec{H} = 0$, đối với từ trường $\vec{E} = 0$ do đó mật độ dòng năng lượng $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}\,] = 0$. Đối với trường điện từ tĩnh năng lượng của trường điện từ không được truyền đi trong không gian.

2.2 Thế vô hướng

2.2.1 Trường điện tĩnh trong môi trường đồng chất. Thế vô hướng



Hình 2.1:

Từ (2.1) ta có rot$\vec{E} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0$ nên trường tĩnh điện là trường thế. Xét hai điểm A, B bất kì trong trường tĩnh điện, l_1 và l_2 là hai đường cong bất kỳ đi từ A đến B tạo thành một chu tuyến khép kín.

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{E}\,d\vec{l} + \int_{-l_2} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{E}\,d\vec{l} - \int_{l_2} \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

$$\int_{l_1} \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{l_2} \vec{E}\,d\vec{l} \tag{2.7}$$

Trong (2.7) vế trái và vế phải lần lượt là công của điện trường dịch chuyển điện tích $q = +1$C từ A tới B theo l_1 và l_2. Như vậy *trong trường tĩnh điện công để di chuyển một điện tích từ điểm này đến điểm khác không phụ thuộc dạng đường đi, chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và cuối.* Đó là tính chất của trường thế.

Đặt

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \tag{2.8}$$

Trong đó $\varphi(\vec{r})$ là một hàm vô hướng của toạ độ, hàm $\varphi(\vec{r})$ thỏa mãn (2.8) gọi là *thế vô hướng* của trường tĩnh điện. Ta có

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \text{grad}\varphi\,d\vec{l}$$

$$\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_A^B \text{grad}\,\varphi\,d\vec{l} = -\int_A^B d\varphi = \varphi(A) - \varphi(B) \tag{2.9}$$

Công của lực điện trường di chuyển điện tích dương bằng đơn vị từ A đến B bằng hiệu điện thế giữa A và B.

Do gradφ = grad$\,(\varphi + C)$ nên phải định cỡ điện thế (quy ước cho điện thế ở nơi nào đó một giá trị xác định). Nếu quy ước $\varphi(\infty) = 0$ thì

$$\varphi(A) = \varphi(A) - \varphi(\infty) = \int_A^\infty \vec{E}\,d\vec{l} \tag{2.10}$$

Điện thế tại một điểm bất kỳ bằng công của điện trường dịch chuyển điện tích dương bằng đơn vị từ điểm đó đến vô cực.

2.2.2 Phương trình vi phân của thế vô hướng

Ta có div$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, thay $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$ được div grad $\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ hay

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.11}$$

(2.11) là phương trình Poisson của thế vô hướng. Tại điểm không có điện tích (2.11) trở thành

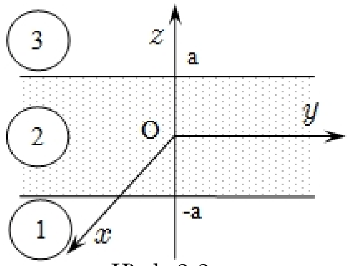
$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{2.12}$$

(2.12) là phương trình Laplace đối với thế vô hướng.

Hàm φ phải thoả mãn điều kiện hữu hạn, liên tục và đạo hàm theo toạ độ phải hữu hạn. Các phương trình (2.11) và (2.12) cùng với các điều kiện biên cho phép ta tính được thế φ tại mọi điểm. Từ đó suy ra $\vec{E}$ theo (2.8)

Ví dụ

Tính điện thế và điện trường gây ra bởi bản phẳng vô hạn dày 2a. Mật độ điện tích ρ không đổi trong bản. Hệ số điện thẩm trong và ngoài bản đều bằng ε.



Hình 2.2:

Điện thế ở mỗi miền 1, 2 và 3 tương ứng là φ_1; φ_2; φ_3. Chọn mặt trung bình của bản trùng với mặt Oxy. Do điện tích phân bố đối xứng nên thế chỉ phụ thuộc vào toạ độ z, do đó $\varphi = \varphi(z)$. Phương trình vi phân của thế

$$\nabla^2\varphi_1 = 0 \qquad (z < -a)$$
$$\nabla^2\varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (-a < z < a)$$
$$\nabla^2\varphi_3 = 0 \qquad (z > a)$$

Trong hệ tọa độ Descartes

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_1 = A_1 z + B_1$$
$$\frac{d^2\varphi_2}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon}z^2 + A_2 z + B_2$$
$$\frac{d^2\varphi_3}{dz^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_3 = A_3 z + B_3$$

Định cỡ cho $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi_2(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$

Do sự phân bố đối xứng của điện tích nên cường độ điện trường tại mặt $z = 0$ phải bằng 0 hay $-\varepsilon\frac{d\varphi_2}{dz}\Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

Áp dụng điều kiện liên tục của thế và điều kiện biên

Tại $z = -a$

$$\varphi_1(-a) = \varphi_2(-a) \Longleftrightarrow -A_1 a + B_1 = -\rho\frac{a^2}{2\varepsilon}$$
$$\varepsilon E_{2n} - \varepsilon E_{21n} = \sigma = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=-a} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=-a}$$
$$\Rightarrow A_1 = \frac{\rho a}{\varepsilon};\ B_1 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon}$$

Tương tự tại $z = a$

$$A_3 = -\frac{\rho a}{\varepsilon};\ B_3 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon}$$

Kết quả

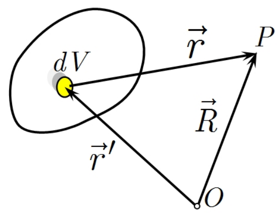
$$\varphi_1 = \frac{\rho a}{\varepsilon}z + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E}_1 = -\mathrm{grad}\varphi_1 = -\frac{d\varphi_1}{dz}\vec{k} = -\frac{\rho a}{\varepsilon}\vec{k}$$
$$\varphi_2 = \frac{\rho z^2}{2\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E}_2 = -\mathrm{grad}\varphi_2 = -\frac{d\varphi_2}{dz}\vec{k} = -\frac{\rho z}{\varepsilon}\vec{k}$$

$$\varphi_3 = -\frac{\rho a}{\varepsilon} z + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon} \Longrightarrow \vec{E}_3 = -\text{grad}\varphi_3 = -\frac{d\varphi_3}{dz}\vec{k} = \frac{\rho a}{\varepsilon}\vec{k}$$

2.3 Điện thế của một hệ điện tích

2.3.1 Điện thế của một điện tích điểm

Cường độ điện trường của một điện tích điểm cho bởi (1.13). Áp dụng (2.10)



Hình 2.3: $\vec{R}$ là bán kính véctơ xác định tọa độ điểm tính thế φ; $\vec{r}_i\,'$ là bán kính véctơ xác định toạ độ điện tích $dq = \rho\, dV$; $\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}_i\,'$ là bán kính véctơ từ điện tích dq đến điểm tính thế $\varphi(\vec{R}\,)$

$$\varphi(\vec{r}\,) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{\vec{r}\, d\vec{l}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

$$\varphi(\vec{r}\,) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{2.13}$$

r là khoảng cách từ điện tích điểm đến điểm tính điện thế.

2.3.2 Điện thế của hệ n điện tích điểm

Điện thế của hệ điện tích điểm bằng tổng các điện thế của từng điện tích

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \tag{2.14}$$

r_i là khoảng cách từ điện tích điểm thứ i đến điểm tính điện thế. Nếu chọn gốc toạ độ tại O điện thế tại điểm quan sát P là

$$\varphi(\vec{R}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i\,'|} \tag{2.15}$$

$\vec{R}$ là toạ độ điểm quan sát, $\vec{r}_i\,'$ là toạ độ điện tích q_i

2.3.3 Điện thế của một hệ điện tích phân bố liên tục

Hệ điện tích phân bố liên tục trên thể tích V với mật độ ρ (Hình 2.3)

$$\varphi(\vec{R}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} \tag{2.16}$$

Hệ điện tích phân bố liên tục trên mặt S với mật độ σ

$$\varphi(\vec{R}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma dS}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} \tag{2.17}$$

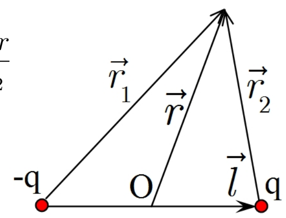
Nếu điện tích vừa phân bố trên V và phân bố trên S

$$\varphi(\vec{R}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Big(\int_V \frac{\rho\, dV}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} + \int_S \frac{\sigma dS}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|}\Big) \tag{2.18}$$

2.3.4 Điện thế của một lưỡng cực điện

Lưỡng cực điện gồm hai điện tích bằng nhau và khác dấu, $\vec{l}$ là bán kính véctơ từ điện tích âm đến điện tích dương. Người ta định nghĩa mômen lưỡng cực điện là $\vec{p} = q\vec{l}$. Điện thế tại P

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\Big(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\Big) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_1 - r}{r_1 r_2}$$



Hình 2.4:

Nếu P ở cách xa lưỡng cực $l \ll \vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r};\ \vec{r}_1 \simeq \vec{r}_2 \simeq \vec{r}$;

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2(r_1 + r_2)} \simeq \frac{r_1^2 - r_2^2}{2r^3}$$

$$r_1^2 - r_2^2 = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \simeq 2\vec{l}\vec{r}$$

do đó

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}\vec{l}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \tag{2.19}$$

Điện trường gây bởi lưỡng cực điện

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla\Big(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\Big) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Big(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\Big) \tag{2.20}$$

2.4 Vật dẫn trong trường điện tĩnh

2.4.1 Vật dẫn trong trường điện tĩnh

Vật dẫn là vật khi có điện trường thì trong nó có điện tích chuyển động. Đối với vật dẫn điện dẫn suất $\lambda \neq 0$. Trong tĩnh điện ta chỉ xét trường hợp không có dòng điện trong vật dẫn (vật dẫn cân bằng tĩnh điện)

Các tính chất của vật dẫn

(a) Khi vật dẫn đặt vào trường tĩnh điện, bên trong vật dẫn điện trường bằng 0.

Theo định luật Ohm $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, Trong trường tĩnh điện $\vec{j} = 0$; $\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

(b) Trong vật dẫn không có điện tích khối. Tất cả điện tích phân bố một lớp mỏng trên bề mặt vật dẫn có bề dày cỡ kích thước nguyên tử.

Do $\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0$ nên $\mathrm{div}\vec{D} = \rho = 0$

(c) Điện trường ở mặt ngoài vật dẫn

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{n} \tag{2.21}$$

áp dụng điều kiện biên $\varepsilon E_{2n} - \varepsilon E_{1n} = \sigma$; $E_{2t} - \varepsilon E_{1t} = 0$, Trong vật dẫn $\vec{E} = 0 \Rightarrow E_{2t} = E_{1t} = E_{1n} = 0; E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

(d) Vật dẫn là vật đẳng thế.

Trong vật dẫn $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \mathrm{const}$, do tính chất liên tục của điện thế nên điện thế trên mặt vật dẫn $\varphi_m = \varphi$

2.4.2 Điện dung của một vật dẫn cô lập

Xét vật dẫn cô lập, điện tích của vật dẫn

$$q = \oint_S \sigma\, dS = \oint_S \varepsilon E_n\, dS = -\varepsilon \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS \tag{2.22}$$

Trong vật dẫn và trên mặt vật dẫn điện thế $\varphi = V$ (V là điện thế của vật dẫn). Bên ngoài vật dẫn điện thế tho mãn phương trình Laplace $\nabla^2\varphi = 0$. Tìm φ dạng $\varphi = V\varphi_1$ với φ_1 là hàm không thứ nguyên thoả mãn $\varphi_1(S) = 1$; $\varphi_1(\infty) = 0$, khi đó (2.22) trở thành:

$$q = -\Big(\varepsilon \oint_S \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS\Big) V \tag{2.23}$$

Đặt

$$C = -\varepsilon \oint_S \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, dS \tag{2.24}$$

C gọi là điện dung của vật dẫn cô lập. Nó phụ thuộc vào hình dạng, kích thước vật dẫn và tính chất môi trường. Đối với mỗi vật dẫn nhất định đặt trong một điện môi nhất định thì điện dung C là một hằng số. (2.23) có thể viết lại

$$C = \frac{q}{V} \tag{2.25}$$

2.4.3 Hệ số điện dung và hệ số cảm ứng của hệ vật dẫn

Xét hai vật dẫn bất kỳ đặt trong điện môi có hệ số điện thẩm ε. Điện thế trên vật 1 và 2 lần lượt là V_1 và V_2. Điện thế ngoài 2 vật dẫn thỏa mãn phương trình Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ và $\varphi(S_1) = V_1$; $\varphi(S_2) = V_2$; $\varphi(\infty) = 0$. Tìm nghiệm dạng $\varphi = V_1\varphi_1 + V_2\varphi_2$ với φ_1; φ_2 là các hàm của toạ độ không thứ nguyên thoả mãn phương trình Laplace và $\varphi_1(S_1) = 1$; $\varphi_2(S_2) = 1$; $\varphi_1(S_2) = 0$; $\varphi_2(S_1) = 0$; $\varphi_1(\infty) = \varphi_2(\infty) = 0$

Mật độ điện tích mặt trên hai vật

$$\sigma_1 = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = -\varepsilon V_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} - \varepsilon V_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} \tag{2.26}$$

$$\sigma_2 = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = -\varepsilon V_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} - \varepsilon V_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \tag{2.27}$$

Điện tích của mỗi vật

$$q_1 = \oint_{S_1} \sigma_1\, dS_1 = -\Big(\varepsilon \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}\, dS_1\Big) V_1 - \Big(\varepsilon \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1}\, dS_1\Big) V_2 \tag{2.28}$$

$$q_2 = \oint_{S_2} \sigma_2\, dS_2 = -\Big(\varepsilon \oint_{S_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}\, dS_2\Big) V_1 - \Big(\varepsilon \oint_{S_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}\, dS_2\Big) V_2 \tag{2.29}$$

Đặt

$$C_{11} = -\varepsilon \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}\, dS_1; \qquad C_{22} = -\varepsilon \oint_{S_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}\, dS_2$$

$$C_{12} = -\varepsilon \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1}\, dS_1; \qquad C_{21} = -\varepsilon \oint_{S_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2}\, dS_2$$

Các hệ số C_{11}; C_{22} gọi là hệ số điện dung của vật dẫn, C_{12}; C_{21} gọi là hệ số cảm ứng giữa các vật dẫn. Chúng phụ thuộc hình dạng, kích thước vị trí tương đối giữa hai vật.

Áp dụng định lý Green cho φ_1 và φ_2

$$\int_V (\varphi_1\nabla^2\varphi_2 - \varphi_2\nabla^2\varphi_1)\, dV = \oint_S \left(\varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right) dS \tag{2.30}$$

V là toàn bộ không gian ngoài hai vật dẫn. Mặt S bao gồm 3 mặt S_1, S_2 và mặt vô cùng. Dễ thấy vế trái của (2.30) bằng 0 do $\nabla^2\varphi_2 = \nabla^2\varphi_1 = 0$. Vế phải (2.30) tách thành 3 tích phân.

Tích phân theo mặt ∞ bằng 0 do $\varphi_1(\infty) = \varphi_2(\infty) = 0$

Trên mặt S_1 và S_2 do $\varphi_1(S_2) = 0$; $\varphi_2(S_1) = 0$

$$\oint_{S_1} \left(\varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_1} - \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}\right) dS_1 = \oint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_1}\, dS_1$$
$$\oint_{S_2} \left(\varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2} - \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}\right) dS_2 = -\oint_{S_2} \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_2}\, dS_2$$

Do đó (2.30) trở thành

$$\oint_{S_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_1}\, dS_1 = -\oint_{S_2} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_2}\, dS_2$$

hay

$$C_{12} = C_{21}$$

Mặt khác do φ_1 giảm theo chiều dương của $\vec{n}_1$ do đó

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} < 0 \Rightarrow C_{11} = -\varepsilon \oint_{S_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}\, dS_1 > 0$$

Theo chiều dương của $\vec{n}_1$ thì φ_2 tăng do đó

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_1} > 0 \Rightarrow C_{12} = -\varepsilon \oint_{S_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_1}\, dS_1 < 0$$

Đối với tụ điện

$$q = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$-q = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$
$$(C_{11} + C_{21})\, V_1 + (C_{22} + C_{12})\, V_2 = 0$$

Để thoả mãn $\forall V_1; V_2$ thì $C_{11} = C_{21} = C_{22} = C_{12} = C$, C gọi là điện dung của tụ

$$C = \frac{q}{|V_1 - V_2|} \tag{2.31}$$

2.5 Điện môi đặt trong trường điện tĩnh

2.5.1 Sự phân cực của điện môi

Khi đặt điện môi vào trường tĩnh điện trong điện môi xuất hiện mômen lưỡng cực (điện môi bị phân cực). Sự phân cực của điện môi tại mỗi điểm đặc trưng bởi véctơ phân cực

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV} \tag{2.32}$$

Véctơ phân cực là mômen lưỡng cực của một đơn vị thể tích bao quanh điểm quan sát.

Tại mỗi điểm trong điện môi véctơ phân cực tỉ lệ với véctơ cường độ điện trường tại điểm đó

$$\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E} \tag{2.33}$$

α gọi là độ cảm điện môi.

2.5.2 Thế vô hướng tại mỗi điểm trong điện môi

Đặt điện môi vào điện trường, do phân cực trong điện môi xuất hiện điện trường phụ, đó là điện trường của các lưỡng cực trong điện môi. Do đó trường tại mỗi điểm là tổng của hai điện trường: trường do điện tích tự do và trường do phân cực gây ra

$$\varphi = \varphi_t + \varphi_f$$

trong đó φ_t cho bởi (2.18), còn điện thế do lưỡng cực gây ra

$$\varphi_f = \int_V d\varphi_f = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{P}\vec{r}}{r^3}\, dV \tag{2.34}$$

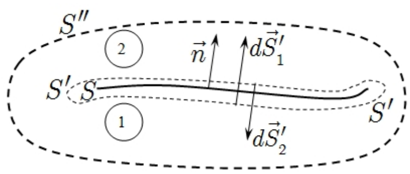
Tích phân (2.34) lấy theo các nguyên tố thể tích dV nên các phép tính phải lấy theo biến $\vec{r}\,'$ là toạ độ của dV (giống quy ước trên Hình 2.3). Ta có

$$\mathrm{grad}_{\vec{r}\,'} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\Big(\frac{1}{r}\Big) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}\,'} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\,(-1) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$
$$\frac{\vec{P}\,\vec{r}}{r^3} = \vec{P}\,\mathrm{grad}\Big(\frac{1}{r}\Big) = \mathrm{div}\,\Big(\frac{\vec{P}}{r}\Big) - \frac{1}{r}\,\mathrm{div}\vec{P}$$

Do đó (2.34) trở thành

$$\varphi_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{-\mathrm{div}\vec{P}}{r}\, dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \mathrm{div}\Big(\frac{\vec{P}}{r}\Big)\, dV \tag{2.35}$$

Áp dụng định lý Ostrogradsky – Gauss cho tích phân thứ 2 trong (2.35). Nếu có mặt S mà véctơ $\vec{P}$ không liên tục thì có thể lấy mặt S' rất gần mặt S để tách S ra khỏi phần



Hình 2.5:

không gian ở đó véctơ $\vec{P}$ biến đổi không liên tục (Hình 2.5). Khi đó

$$\int_V \mathrm{div}\frac{\vec{P}}{r}\,dV = \oint_{S'}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}' + \oint_{S''}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}''$$

$$\oint_{S'}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}' = \int_{S'_1}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}'_1 + \int_{S'_2}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}'_2$$

Cho S'_1; $S'_2 \to S''$

$$\oint_{S'}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}' = \int_{S'_1}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}'_1 + \int_{S'_2}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}'_2 = \int_S \frac{(P_{1n} - P_{2n})}{r}dS$$

Lấy mặt S'' bao toàn bộ không gian chứa điện môi thì $\oint_{S''}\frac{\vec{P}}{r}\,d\vec{S}'' = 0$ (do trên S'' $P_n = 0$). Do đó (2.35) trở thành

$$\varphi_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\mathrm{div}\vec{P}}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(P_{1n} - P_{2n})}{r}\,dS$$

Đặt

$$\rho_l = -\mathrm{div}\vec{P} \tag{2.36}$$

gọi là *mật độ điện tích liên kết khối*, và

$$\sigma_l = -\left(P_{2n} - P_{1n}\right)$$

gọi là *mật độ điện tích liên kết mặt.*

$$\varphi = \varphi_t + \varphi_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho + \rho_l}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma + \sigma_l}{r}dS \tag{2.37}$$

Trong sự tạo ra điện trường phụ điện tích liên kết có vai trò giống như các điện tích tự do. Tuy nhiên điện tích liên kết gắn với sự có mặt của điện môi và chỉ xuất hiện trong các điện môi không đồng nhất hoặc trong các điện trường không đồng nhất (đối với các điện tích khối liên kết) và trên bề mặt giữa hai điện môi (đối với điện tích mặt kiên kết). Các điện tích liên kết không di chuyển tự do trong chân không.

2.5.3 Mối liên hệ giữa độ cảm điện môi và hệ số điện môi

Trong chân không điện trường do các điện tích tự do gây ra

$$\mathrm{div}\,\vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Trong điện môi điện trường do cả điện tích tự do và các điện tích liên kết gây ra. Nếu coi điện môi gồm điện tích tự do và điện tích liên kết đặt trong chân không thì

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho + \rho_l}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho - \mathrm{div}\vec{P}\right)$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\,) = \rho$$

Mặt khác trong điện môi $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ do đó

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \alpha\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 + \alpha\right) \tag{2.38}$$

2.6 Năng lượng của trường điện tĩnh

2.6.1 Biểu diễn năng lượng của trường điện tĩnh qua thế vô hướng

Mật độ năng lượng của trường tĩnh điện $w = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$. Năng lượng trường tĩnh điện trong thể tích V

$$W = \int_V w\,dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\vec{D}\,dV \tag{2.39}$$

Thay $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$

$$W = -\frac{1}{2}\int_V \vec{D}\mathrm{grad}\varphi\,dV$$

Ta có $\mathrm{div}(\varphi\vec{D}) = \varphi\mathrm{div}\vec{D} + \vec{D}\mathrm{grad}\varphi = \varphi\rho + \vec{D}\mathrm{grad}\varphi$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\,dV - \frac{1}{2}\int_V \mathrm{div}(\varphi\vec{D})\,dV$$

Nếu môi trường liên tục $\int_V \mathrm{div}(\varphi\vec{D})\,dV = \oint_S \varphi\vec{D}\,dS$. Lấy S là mặt bao toàn bộ điện trường, trên mặt S đó $\vec{D} = 0$. Do đó $\oint_S \varphi\vec{D}\,dS = 0$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\,dV \tag{2.40}$$

Nếu có mặt S mà véctơ $\vec{D}$ không liên tục thì có thể lấy mặt S' (Hình 2.5, trang 24) rất gần mặt S để tách S ra khỏi phần không gian ở đó véctơ $\vec{D}$ biến đổi không liên tục. Lý luận tương tự như mục 2.5.2 và sử dụng điều kiện biên $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$ ta có $\int_V \mathrm{div}(\varphi\vec{D})\,dV = \int_S \varphi\sigma dS$. Kết quả

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\,dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\,dS \tag{2.41}$$

(2.39) (2.40) và (2.41) tương đương nhau về mặt toán học nhưng có ý nghĩa vật lý khác nhau. Theo (2.39) năng lượng điện trường phân bố liên tục trong không gian. Còn theo (2.40) và (2.41) năng lượng điện trường là năng lượng tương tác giữa các điện tích.

2.6.2 Năng lượng của một hệ điện tích điểm

Giả sử trong chân không có điện trường q_1. Đưa q_2 từ vô cùng tới điểm cách q_1 khoảng r_{12} thì cần phải cung cấp năng lượng

$$W_{12} = q_2\varphi_2 = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

Đưa q_3 từ đến cách q_1, q_2 khoảng r_{13} và r_{23} cần cung cấp năng lượng.

$$\begin{aligned} W &= \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[q_1\Big(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}\Big) + q_2\Big(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}}\Big) + q_3\Big(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3) \end{aligned}$$

Mở rộng cho hệ n điện tích điểm

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i \tag{2.42}$$

Năng lượng hệ điện tích điểm bằng năng lượng tiêu hao để thiết lập hệ đó từ các điện tích riêng lẻ.

2.6.3 Năng lượng của một hệ vật dẫn tích điện

Đối với vật dẫn $\rho = 0$, năng lượng của vật dẫn

$$W = \frac{1}{2}\oint_S \sigma\varphi\, dS$$

Trong hệ vật dẫn, trên vật dẫn thứ i

$$W_i = \frac{1}{2}\oint_{S_i} \sigma_i\varphi_i\, dS_i = \frac{1}{2}\varphi_i \oint_{S_i} \sigma_i\, dS_i = \frac{1}{2}q_i\varphi_i$$

Hệ có n vật dẫn thì năng lượng của hệ

$$W = \sum_i W_i = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i \tag{2.43}$$

Đối với tụ điện

$$W = \frac{1}{2}(qV_1 - qV_2) = \frac{1}{2}q(V_1 - V_2)$$

Sử dụng (2.31) ta có

$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \tag{2.44}$$

2.6.4 Năng lượng của hệ điện tích đặt trong điện trường

Xét hệ điện tích đặt trong điện trường ngoài[1]. Giả thiết hệ điện tích không bị biến dạng và trường của hệ đủ nhỏ để không làm biến đổi trường ngoài

Hệ n điện tích điểm thì thế năng của hệ trong trường ngoài

$$U = \sum_i q_i\varphi_i \tag{2.45}$$

Hệ điện tích phân bố liên tục trong V với mật độ ρ đặt trong điện trường ngoài thì thế năng của hệ

$$U = \int_V \rho\varphi\, dV \tag{2.46}$$

Lưỡng cực điện đặt trong điện trường ngoài thì thế năng của nó

$$U = q\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - q\varphi(\vec{r}) = q\left(\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - \varphi(\vec{r})\right)$$

Nếu kích thước lưỡng cực đủ nhỏ và trường ngoài biến thiên không đáng kể trong phạm vi lưỡng cực, sử dụng khai triển Taylor $\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - \varphi(\vec{r}) = (\vec{l}\nabla)\varphi(\vec{r}) = \vec{l}\,\mathrm{grad}\varphi$

$$U = q\vec{l}\,\mathrm{grad}\varphi = -\vec{p}\vec{E} \tag{2.47}$$

[1] không phải điện trường gây ra bởi hệ điện tích

2.7 Lực tác dụng trong trường điện tĩnh

Lực điện trường tác dụng lên điện tích điểm q là

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.48}$$

Nếu điện tích phân bố liên tục trong thể tích V thì lực điện trường tác dụng lên thể tích V

$$\vec{F} = \int_V \rho\vec{E}\,dV \tag{2.49}$$

Lực điện trường tác dụng lên lưỡng cực điện

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r}+\vec{l}\,) - \vec{E}(\vec{r}\,)\right) \tag{2.50}$$

Nếu kích thước lưỡng cực đủ nhỏ thì có thể khai triển Taylor $\vec{E}(\vec{r}+\vec{l}\,) - \vec{E}(\vec{r}\,) = (\vec{l}\,\nabla)\vec{E}(\vec{r}\,)$, khi đó

$$\vec{F} = q(\vec{l}\nabla)\vec{E}(\vec{r}\,) = (\vec{p}\nabla)\vec{E}(\vec{r}\,) \tag{2.51}$$

Cũng có thể tích được lực tác dụng nếu biết biểu thức năng lượng của hệ điện tích. Nếu năng lượng W là hàm của các tọa độ suy rộng q_i thì lực suy rộng bằng

$$F_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i} \tag{2.52}$$

Nếu năng lượng W là hàm của các tọa độ thường thì lực thông thường

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}W \tag{2.53}$$

Chương 3

Trường điện từ dừng

3.1 Các phương trình của trường điện từ

3.1.1 Trường điện từ dừng

Trường điện từ dừng là trường thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) Các đại lượng điện từ không biến đổi theo thời gian, tức là đạo hàm riêng theo thời gian của các đại lượng đó bằng không.

(b) Có các dòng điện dừng (dòng điện không đổi).

3.1.2 Các phương trình của trường điện từ dừng

Với các điều kiện của trường điện từ dừng thì điện trường và từ trường độc lập với nhau, như vậy các phương trình của trường điện từ dừng có thể chia làm hai nhóm cho trường điện dừng và trường từ dừng.

(a) Nhóm các phương trình trường điện dừng

Các phương trình trường điện dừng chia làm hai nhóm:

- Nhóm các phương trình trường điện dừng trong điện môi (ở ngoài môi trường dẫn)

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho\,; \quad \mathrm{rot}\vec{E} = 0\,; \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{3.1}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma\,; \quad E_{2t} - E_{1t} = 0 \tag{3.2}$$

- Nhóm các phương trình trường điện dừng trong vật dẫn

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho\,; \quad \mathrm{rot}\vec{E} = 0\,; \quad \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_n) \tag{3.3}$$

$$j_{2n} - j_{1n} = 0\,; \quad E_{2t} - E_{1t} = 0 \tag{3.4}$$

(b) Nhóm các phương trình trường từ dừng

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0\,; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}\,; \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{3.5}$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0\,; \quad H_{2t} - H_{1t} = i_N \tag{3.6}$$

3.2 Các định luật cơ bản của dòng điện không đổi

3.2.1 Định luật Ohm

Phương trình liên hệ giữa mật độ dòng điện và cường độ trường điện có dạng:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{(n)}) \tag{3.7}$$

(3.7) là phương trình của định luật Ohm suy rộng viết dưới dạng vi phân. Lấy tích phân hai vế phương trình (3.7) dọc theo chiều dương của đường dòng khép kín của véctơ $\vec{j}$ ta có:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{j}\, d\vec{l} = \lambda \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\, d\vec{l} + \lambda \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l} \tag{3.8}$$

Vì $\vec{E}$ là trường thế (trường có nguồn gốc tĩnh điện) nên tích phân thứ nhất trong vế phải của (3.8) bằng không. Còn tích phân thứ hai được gọi là thế điện động ngoại lai:

$$\mathcal{E}_{(n)} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l} \tag{3.9}$$

Vì $\vec{j}$ và $d\vec{l}$ cùng phương và chiều nên $\frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = \frac{jdl}{\lambda} = jS\frac{dl}{\lambda S} = IdR$, trong đó S là tiết diện của dòng điện. Do đó

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = \oint_{\mathcal{L}} IdR = IR \tag{3.10}$$

với R là điện trở của toàn mạch. Và (3.8) trở thành

$$\mathcal{E}_{(n)} = IR \tag{3.11}$$

(3.11) là dạng tích phân của định luật Ohm đối với toàn mạch. Ta thấy rằng dòng điện dừng do thế điện động ngoại lai sinh ra. Độ lớn của nó tỉ lệ với độ lớn của thế điện động ngoại lai.

Đối với một đoạn mạch AB nào đó ta có thể rút ra định luật Ohm như sau: lấy tích phân (3.7) dọc theo đường sức của véctơ $\vec{j}$ từ A đến B ta có

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} &= \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}_{(n)} d\vec{l} \\ &= \varphi(A) - \varphi(B) + \mathcal{E}_{(n)} \end{aligned}$$

$\varphi(A) - \varphi(B)$ là hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch, $\mathcal{E}_{(n)} = \int_A^B \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l}$ là thế điện động ngoại lai trên đoạn mạch AB, $\int_A^B \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = IR_{AB}$, trong đó R_{AB} là điện trở của đoạn mạch AB. Do đó

$$IR_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B) + \mathcal{E}_{(n)} \tag{3.12}$$

(3.12) là biểu thức toán học của định luật Ohm cho dòng điện I chảy qua đoạn mạch AB.

3.2.2 Định luật Joule – Lentz

Ta xét một thể tích V bất kỳ chứa những dòng dừng (không có dòng chảy ra hoặc chảy vào thể tích đó). Nhiệt lượng Joule – Lentz tỏa ra trong một đơn vị thời gian trong thể tích V là

$$Q = \int_V q\, dV = \int_V \frac{j^2}{\lambda}\, dV \tag{3.13}$$

Áp dụng định luật Ohm suy rộng ta có:

$$\frac{j^2}{\lambda} = \frac{\vec{j}\lambda(\vec{E} + \vec{E}_{(n)})}{\lambda} = \vec{j}\vec{E} + \vec{j}\vec{E}_{(n)}$$

và (3.13) trở thành:

$$Q = \int_V \vec{j}\vec{E}\, dV + \int_V \vec{j}\vec{E}_{(n)}\, dV \tag{3.14}$$

Để ý $\mathrm{div}\vec{j} = 0$, nên $\vec{j}\vec{E} = -\vec{j}\mathrm{grad}\varphi = -\mathrm{div}\,(\varphi\vec{j}) - \varphi\mathrm{div}\vec{j} = -\mathrm{div}\,(\varphi\vec{j})$ nên

$$\int_V \vec{j}\vec{E}\, dV = -\int_V \mathrm{div}(\varphi\vec{j})\, dV = -\oint_S \varphi j_n dS = 0$$

Vì trên mặt kín S thì $j_n = 0$ (do giả thiết không có dòng chảy ra hoặc chảy vào). Do đó (3.14) trở thành:

$$Q = \int_V \vec{j}\vec{E}_{(n)}\, dV \tag{3.15}$$

(3.15) là biểu thức toán học của định luật Joule – Lentz suy rộng dạng tích phân. Ta thấy rằng *nhiệt tỏa ra nhờ sự tiêu hao năng lượng do điện trường ngoại lai cung cấp, và không tiêu hao năng lượng của điện trường tĩnh hoặc từ trường dừng. Do đó quá trình tỏa nhiệt từ trường của dòng dừng không thay đổi.*

3.2.3 Định luật Kirchhoff thứ nhất

Đối với dòng điện không đổi $\mathrm{div}\vec{j} = 0$ nên

$$\int_V \mathrm{div}\vec{j}\, dV = -\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = 0 \tag{3.16}$$

Ở đây V là một thể tích nào đó, còn S là mặt kín bao bọc thể tích V đó. Nếu chúng ta giả thiết rằng có n dòng điện chảy qua mặt kín đó thì:

$$\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{S_i} \vec{j}\, d\vec{S}$$

$\int_{Si} \vec{j}\, d\vec{S} = I_i$ là cường độ dòng điện chảy qua phần điện tích S_i. Do đó (3.16) có thể viết thành:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{3.17}$$

Chọn $\vec{n}$ là pháp tuyến của mặt S thì $I_i > 0$ khi dòng điện chảy ra và $I_i < 0$ khi dòng chảy vào mặt S. Như vậy định luật Kirchhoff thứ nhất có thể phát biểu:

Ở chỗ mạch rẽ tổng đại số các dòng điện bằng không

3.2.4 Định luật Kirchhoff thứ hai

Đối với trường điện dừng ta cũng có $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ cho nên

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0 \tag{3.18}$$

Nếu mạch điện khép kín gồm n đoạn mạch $l_i (i = 1, n)$ thì $\oint \vec{E}\,d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \vec{E}\,d\vec{l}$. Biểu diễn qua và lấy tích phân theo từng đoạn mạch ta được:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\,d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_1 - \varphi_2)_i \tag{3.19}$$

ở đây $\oint_{l_i} \vec{E}\,d\vec{l} = (\varphi_1 - \varphi_2)_i$ là hiệu điện thế giữa điểm đầu (chỉ số 1) và điểm cuối (chỉ số 2) của đoạn mạch thứ i . Như vậy đoạn mạch nào mà $\vec{E}$ và $\vec{l}$ cùng chiều thì $(\varphi_1 - \varphi_2)_i > 0$ còn đoạn mạch nào mà $\vec{E}$ và $\vec{l}$ ngược chiều thì $(\varphi_1 - \varphi_2)_i < 0$. (3.18) có thể viết thành:

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \tag{3.20}$$

(3.20) là biểu thức của định luật Kirchhoff thứ hai. Định luật Kirchhoff thứ hai có thể phát biểu

Trong mạch điện kín tổng đại số các độ giảm thế ở các đoạn mạch bằng không.

Sử dụng (3.12) thì (3.20) có thể viết dạng

$$\sum_{i=1}^{n} (IR)_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{(n)i} \tag{3.21}$$

(3.21) là cách biểu diễn khác của định luật Kirchhoff thứ 2.

Trong một mạch điện kín, tổng các độ giảm thế IR bằng tổng các sức điện động của trường lạ trên mạch đó.

3.3 Thế vectơ. Định luật Biot – Savart

3.3.1 Thế vectơ

Nếu $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ là một hàm vectơ của tọa độ thì ta có thể đặt

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \tag{3.22}$$

Khi đó $\vec{B}$ luôn thỏa mãn phương trình $\text{div}\vec{B} = 0$. ($\text{div}\,\text{rot}\vec{A} = \nabla\,(\nabla \times \vec{A}\,) \;=\; 0$). Hàm vectơ $\vec{A}(\vec{r})$ thỏa mãn các điều kiện như trên được gọi là thế vectơ của từ trường dừng. Giả sử ta chọn được một hàm vectơ $\vec{A}\,'$ liên hệ với $\vec{A}$ bằng biểu thức:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}u$$

Trong đó u là một hàm vô hướng của tọa độ. Hàm vectơ $\vec{A}'$ xác định từ trường $\vec{B}' = \text{rot}\vec{A}'$. Ta có

$$\vec{B}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad}\,u) = \text{rot}\vec{A} + \text{rot}\,\text{grad}\,u = \text{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

Như vậy hàm vectơ $\vec{A}'$ cũng là thế vectơ của từ trường $\vec{B}$. Thế vectơ không được xác định một cách đơn giá. Ứng với từ trường $\vec{B}$ có vô số thế vectơ $\vec{A}$ sai khác nhau một gradien của một hàm vô hướng bất kỳ. Muốn xác định thế vectơ $\vec{A}$ một cách đơn giá thì phải quy ước điều kiện định cỡ cho nó. Thông thường chọn điều kiện định cỡ

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0 \tag{3.23}$$

Thế vectơ là một đại lượng trung gian, không có ý nghĩa vật lý. Trong thực nghiệm ta đo được từ trường $\vec{B}$ mà không đo trực tiếp được thế vectơ $\vec{A}$.

3.3.2 Phương trình vi phân của thế vectơ

Ta có $\mathrm{rot}\mu\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \mu\vec{j}$. Để ý $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$, và điều kiện định cỡ (3.23). Ta có:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \tag{3.24}$$

(3.24) là phương trình Poisson của thế vectơ, tương tự như phương trình Poisson của thế vô hướng.

Ở những điểm có $\vec{A} = 0$, phương trình (3.24) trở thành.

$$\nabla^2\vec{A} = 0 \tag{3.25}$$

(3.25) là phương trình Laplace của thế vectơ.

Nếu chiếu (3.24) và (3.25) xuống ba trục tọa độ ta cũng được ba phương trình vô hướng giống như phương trình vi phân của thế vô hướng (2.11) và (2.12).

3.3.3 Định luật Biot – Savart

Ta có thể tìm nghiệm của phương trình thế vectơ bằng cách đối chiếu với nghiệm của phương trình thế vô hướng. Ta thấy ở đây $\vec{A}$ và $\vec{j}$ tương tự như φ và ρ, còn μ tương tự với $\frac{1}{\varepsilon}$. Do đó đối chiếu với nghiệm của phương trình thế vô hướng là (2.16) ta viết được

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\,dV}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} \tag{3.26}$$

Trong trường hợp dòng điện là dòng mặt có mật độ bằng $\vec{i}$, đối chiếu với (2.17) ta cũng viết được:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\vec{i}dS}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} \tag{3.27}$$

Các vectơ $\vec{R}$ và $\vec{r}\,'$ được chỉ rõ ở Hình 2.3 (trang 20). Trong trường hợp tồn tại cả dòng điện khối lẫn dòng điện mặt thì:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\,dV}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} + \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\vec{i}dS}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} \tag{3.28}$$

Biết được $\vec{A}$ ta tính được $\vec{B}$ theo hệ thức $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$.

Tính $\vec{B}$ trong trường hợp chỉ có mật độ dòng điện khối $\vec{j}$.

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\text{rot}\Big(\int_V \frac{\vec{j}\,dV}{r}\Big)$$

Vì $\vec{A}$ là thế vectơ của từ trường dừng tại điểm quan sát P nên $\vec{A}$ là hàm của $\vec{R}$, vậy rot$\vec{A}$ phải lấy theo tọa độ $\vec{R}$. Tích phân lấy theo các nguyên tố dV là hàm của $\vec{r}\,'$. Do đó phép tính rota và phép lấy tích phân ở đây độc lập với nhau nên ta có thể đưa phép tính rota vào trong dấu tích phân

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \text{rot}\Big(\frac{\vec{j}}{r}\Big)\,dV \tag{3.29}$$

Ta có rot $\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\text{rot}\,\vec{j} - \left[\vec{j}\times\text{grad}\,\frac{1}{r}\right]$. Vì rota lấy theo $\vec{R}$ mà $\vec{j}$ là hàm của $\vec{r}\,'$ nên rot$\vec{j} = 0$. Mặt khác

$$\text{grad}_R\,\frac{1}{r} = \text{grad}_r\,\frac{1}{r}\,\frac{d\vec{r}}{d\vec{R}} = \Big(-\frac{\vec{r}}{r^3}\Big)(1) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$
$$-\Big[\vec{j}\times\text{grad}\,\frac{1}{r}\Big] = -\Big[\vec{j}\times\Big(-\frac{\vec{r}}{r^3}\Big)\Big] = \frac{[\vec{j}\times\vec{r}]}{r^3}$$

nên (3.29) trở thành:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j}\times\vec{r}]}{r^3}\,dV \tag{3.30}$$

(3.30) là biểu thức của định luật Biot – Savart. Định luật Biot – Savart cho phép ta xác định véctơ cảm ứng từ $\vec{B}$ tại một điểm bất kì trong không gian khi biết phân bố dòng điện.

Trong trường hợp có cả dòng điện khối và dòng điện mặt thì

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j}\times\vec{r}]}{r^3}\,dV + \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{[\vec{i}\times\vec{r}]}{r^3}\,dS \tag{3.31}$$

Định luật Biot – Savart cũng cho phép xác định véctơ cường độ từ trường

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j}\times\vec{r}]}{r^3}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{[\vec{i}\times\vec{r}]}{r^3}\,dS \tag{3.32}$$

Từ các công thức trên ta thấy rằng véctơ cảm ứng từ $\vec{B}$ phụ thuộc tính chất từ của môi trường, véctơ cường độ từ trường $\vec{H}$ không phụ thuộc tính chất từ của môi trường. So sánh với trường điện tĩnh ta thấy $\vec{B}$ giữ vai trò của $\vec{E}$ (phụ thuộc môi trường). Lẽ ra phải gọi $\vec{B}$ là từ trường còn $\vec{H}$ là cảm ứng từ mới phản ánh đúng thực chất các vectơ đó. Cũng như vậy $\frac{1}{\mu}$ giữ vai trò như ε, nên đáng lẽ phải gọi $\frac{1}{\mu}$ là độ từ thẩm mới đúng thực chất của nó[1].

Đối với dòng tuyến tính[2], gọi S là tiết diện và dl là nguyên tố chiều dài của dây dẫn ta có $dV = Sdl$, $\vec{j}\,dV = \vec{j}Sdl = jS\,d\vec{l} = I\,d\vec{l}$. Các công thức (3.30),

[1]từ ban đầu người ta đã quen gọi ngược lại và theo thói quen nên vẫn giữ cách gọi như thế

[2]dòng chảy trong vật dẫn là dây dẫn có tiết diện rất nhỏ so với chiều dài của chúng, khi đó mật độ dòng điện phân bố đều theo tiết diện của dây

(3.32) trở thành:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \tag{3.33}$$

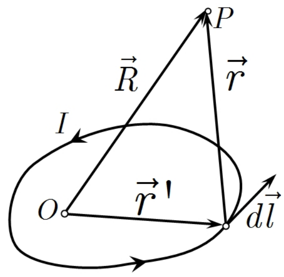
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \tag{3.34}$$

3.4 Từ trường của dòng nguyên tố

Ta định nghĩa dòng nguyên tố[3] là một dòng điện khép kín chảy trong một miền có kích thước rất nhỏ so với khoảng cách từ dòng tới điểm quan sát. Với cách định nghĩa đó, bất kỳ một dòng khép kín nào cũng có thể gọi được là một dòng nguyên tố.

Đối với dòng nguyên tố (3.26) trở thành:

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} \tag{3.35}$$



Hình 3.1:

Lấy gốc tọa độ O trong miền chứa dòng nguyên tố (Hình 3.1). Ta có $r' \ll R$, khai triển hàm trong dấu tích phân theo chuỗi Taylo và bỏ qua các vô cùng bé bậc cao (chỉ lấy tới số hạng chứa đạo hàm hạng nhất) ta có:

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{R} - (\vec{r}\,'\nabla)\frac{1}{R} + \cdots = \frac{1}{R} + \frac{\vec{r}\,'\vec{R}}{R^3} + \cdots$$

(3.35) trở thành

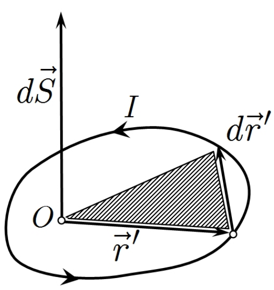
$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi R} \oint d\vec{r}\,' + \frac{\mu I}{4\pi R^3} \oint (\vec{R}\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' \tag{3.36}$$

Tích phân thứ nhất trong vế phải của (3.36) là tích phân theo đường kín của vi phân toàn phần một vectơ, do đó nó bằng không. Biến đổi hàm dưới dấu tích phân thứ hai và chú ý rằng tích phân đó lấy theo $d\vec{r}$ nên $\vec{R}$ coi như một hằng số.

$$\begin{aligned}
(\vec{R}\vec{r}\,')d\vec{r}\,' &= \frac{1}{2}\Big((\vec{R}\vec{r}\,')d\vec{r}\,' + (\vec{R}d\vec{r}\,')\vec{r}\,'\Big) + \frac{1}{2}\Big((\vec{R}\vec{r}\,')d\vec{r}\,' - (\vec{R}d\vec{r}\,')\vec{r}\,'\Big) \\
&= \frac{1}{2}d\Big((\vec{R}\vec{r}\,')\vec{r}\,'\Big) + \frac{1}{2}\Big[[\vec{r}\,' \times d\vec{r}\,'] \times \vec{R}\Big] \\
\oint (\vec{R}\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' &= \frac{1}{2}\oint d\Big((\vec{R}\vec{r}\,')\vec{r}\,'\Big) + \frac{1}{2}\oint \Big[[\vec{r}\,' \times d\vec{r}\,'] \times \vec{R}\Big]
\end{aligned}$$

Hàm dưới dấu thứ nhất là vi phân toàn phần của một vectơ, nếu lấy tích phân theo đường kín sẽ bằng không. Do đó (3.36) sẽ trở thành:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\frac{\mu I}{4\pi R^3}\Big[\Big(\oint [\vec{r}\,' \times d\vec{r}\,']\Big) \times \vec{R}\Big] \tag{3.37}$$



Hình 3.2:

[3] khác với nguyên tố dòng

ở đây ta đưa được dấu tích phân vào trong dấu tích vectơ vì thừa số thứ hai của phép nhân là $\vec{R}$ được coi như hằng số đối với phép lấy tích phân.

Đặt:

$$\vec{M} = \frac{I}{2}\oint [\vec{r}\,' \times d\vec{r}\,'] \tag{3.38}$$

(3.37) trở thành

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{[\vec{M}\times\vec{R}\,]}{R^3} \tag{3.39}$$

$\vec{A}$ theo (3.39) có dạng gần giống như φ theo (2.19) của lưỡng cực điện. Vectơ định nghĩa bằng (3.38) được gọi là *mômen từ của dòng nguyên tố*. Biết được mômen từ của dòng nguyên tố ta tính được từ trường của nó

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\mathrm{rot}\Big(\frac{[\vec{M}\times\vec{R}]}{R^3}\Big) = \frac{\mu}{4\pi}\Big(\frac{3(\vec{M}\vec{R})\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{M}}{R^3}\Big) \tag{3.40}$$

(3.40) có dạng tương tự như (2.20) của điện trường một lưỡng cực điện. Theo Hình 3.2 thì $\frac{1}{2}[\vec{r}\,' \times d\vec{r}\,'\,] = d\vec{S}$ là vi phân vectơ diện tích (diện tích hình tam giác có gạch chéo). Do đó $\frac{1}{2}\oint[\vec{r}\,' \times d\vec{r}\,'\,] = \vec{S}$ là vectơ diện tích của mặt do dòng nguyên tố bao quanh, chiều của vectơ $\vec{S}$ và chiều của dòng nguyên tố được xác định bằng quy tắc vặn nút chai. Do đó (3.38) trở thành:

$$\vec{M} = I\vec{S} \tag{3.41}$$

Công thức (3.41) tương tự như công thức định nghĩa mômen lưỡng cực điện $\vec{P} = q\vec{l}$. Vì thế cũng được gọi là mômen lưỡng cực từ và một dồng điện khép kín có thể được coi là một lưỡng cực từ. Mặt thuận của dòng điện (mặt theo đó ta nhìn thấy dòng điện chảy ngược chiều kim đồng hồ) ứng với "từ tích" dương (từ cực bắc), mặt kia ứng với "từ tích" âm (từ cực nam).

Chú ý rằng chỉ có ở miền xa lưỡng cực mới có sự tương tự giữa hình ảnh các đường sức điện trường và từ trường, ở gần lưỡng cực thì đường sức điện trường của lưỡng cực điện bắt đầu và kết thúc ở các điện tích còn đường sức từ trường của lưỡng cực từ là khép kín.

3.5 Từ môi trong từ trường không đổi

3.5.1 Sự từ hóa của từ môi

Khi đặt từ môi vào một từ tường ngoài không đổi, trong từ môi xuất hiện một mômen từ. Ta nói rằng từ môi đã bị từ hóa. Mức độ từ hóa tại mỗi điểm của từ môi được đo bằng *vectơ từ hóa* $\vec{I}$, là mômen từ của một đơn vị thể tích bao quanh điểm quan sát.

$$\vec{I} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{M}}{\Delta V} = \frac{d\vec{M}}{dV} \tag{3.42}$$

Như vậy mômen từ của một nguyên tố thể tích dV là:

$$d\vec{M} = \vec{I}\,dV \tag{3.43}$$

Mômen từ của từ môi gây ra một từ trường phụ bổ sung vào từ trường ngoài. Ảnh hưởng của từ môi đối với từ trường tương tự như ảnh hưởng của điện môi đối với điện trường. Tuy nhiên thực nghiệm cho biết rằng có một khác nhau căn bản giữa điện môi và từ môi, đó là là điện trượng phụ (do phân cực) bao giờ cũng ngược chiều với điện trường ngoài và làm nó yếu đi, nhưng từ trường phụ (do từ hóa) có thể cùng chiều hoặc ngược chiều với từ trường ngoài và làm nó mạnh lên hoặc yếu đi.

Từ môi gây ra từ trường phụ cùng chiều với từ trường ngoài gọi là *chất thuận từ*, từ môi gây ra từ trường phụ ngược chiều với từ trường ngoài gọi là *chất nghịch từ*. Đối với tất cả các chất nghịch từ và phần lớn các chất thuận từ, từ trường phụ rất yếu so với từ trường ngoài và nó cũng mất đi khi từ trường ngoài mất đi. Còn một loại từ môi thứ ba có từ trường phụ rất lớn so với từ trường ngoài và không mất đi khi từ trường ngoài mất đi, đó là *chất sắt từ*.

Thực nghiệm cho biết giữa véctơ từ hóa $\vec{I}$ và từ trường ngoài có hệ thức

$$\vec{I} = \beta \vec{H} \tag{3.44}$$

Hệ số β gọi là độ cảm của từ môi. Nó có thể âm hoặc dương.

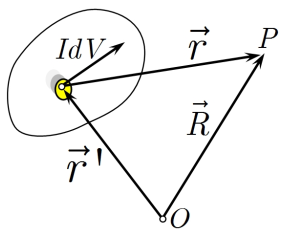
3.5.2 Thế véctơ của từ trường khi có từ môi

Khi ta đặt một từ môi vào từ trường ngoài, từ trường tại mỗi điểm của từ môi là tổng của hai trường: từ trường ngoài do dòng điện dẫn gây ra và từ trường phụ do sự từ hóa của từ môi gây ra. Do đó thế véctơ tại mỗi điểm bằng

$$\vec{A} = \vec{A}_d + \vec{A}_t \tag{3.45}$$

Trong đó $\vec{A}_d$ là thế véctơ do dòng điện dẫn gây ra và được xác định theo (3.26) và (3.27) hoặc (3.28). Ta phải tìm thế véctơ $\vec{A}_t$ do sự từ hóa của môi trường gây ra. Theo (3.39) và (3.43) ta có

$$\vec{A}_t = \int_V d\vec{A}_t = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[d\vec{M} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{I} \times \vec{r}]}{r^3}\, dV$$



Hình 3.3:

Tích phân lấy theo dV là của hàm $\vec{r}\,'$ và véctơ từ hóa $\vec{I}$ của nguyên tố dV cũng là hàm của $\vec{r}\,'$, (Hình 3.3). Để ý

$$\mathrm{grad}_{r'} \frac{1}{r} = \mathrm{grad}_r \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{d\vec{r}\,'} = \Big(-\frac{\vec{r}}{r^3}\Big)(-1) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\mathrm{rot}\Big(\frac{\vec{I}}{r}\Big) = \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}\vec{I} - \Big[\vec{I} \times \mathrm{grad}\frac{1}{r}\Big] = \frac{1}{r}\mathrm{rot}\vec{I} - \frac{[\vec{I} \times \vec{r}]}{r^3}$$

Do đó

$$\vec{A}_t = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{I} \times \vec{r}]}{r^3}\, dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathrm{rot}\vec{I}}{r}\, dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{rot}\Big(\frac{\vec{I}}{r}\Big)\, dV$$

Ta có:

$$\int_V \mathrm{rot}\Big(\frac{\vec{I}}{r}\Big)\, dV = \oint_S \frac{[d\vec{S} \times \vec{I}]}{r}$$

Muốn áp dụng được phép biến đổi trên $\mathrm{rot}(\frac{\vec{I}}{r})$ phải liên tục trên toàn thể tích V lấy tích phân. Nhưng trong thực tế ở các mặt giới hạn giữa hai điện môi hoặc giữa điện môi và chân không thì véctơ $\vec{I}$ gián đoạn. Trong trường hợp này ta dùng phương pháp như mục 2.5.2 (hình 2.5, trang 24) khi tính ρ_l và σ_l. Ta có:

$$\oint_S \frac{[d\vec{S} \times \vec{I}]}{r} = \oint_{S'} \frac{[d\vec{S}' \times \vec{I}]}{r} + \oint_{S''} \frac{[d\vec{S}'' \times \vec{I}]}{r}$$

Lấy mặt S'' bao toàn thể không gian chứa từ môi, tích phân theo mặt kín S'' bằng không.

$$\oint_{S'} \frac{[d\vec{S}' \times \vec{I}]}{r} = \int_{S'_1} \frac{[d\vec{S}'_1 \times \vec{I}_1]}{r} + \int_{S'_2} \frac{[d\vec{S}'_2 \times \vec{I}_2]}{r}$$

Cho $S' \longrightarrow S$ tích phân theo S' trở thành:

$$\int_S \frac{[d\vec{S} \times (\vec{I}_1 - \vec{I}_2)]}{r} = \int_S \frac{[\vec{n} \times (\vec{I}_1 - \vec{I}_2)]}{r} dS$$

Kết quả ta có:

$$\vec{A}_t = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{\mathrm{rot}\vec{I}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_S \frac{[\vec{n} \times (\vec{I}_2 - \vec{I}_1)]}{r} dS$$

trong đó tích phân thứ nhất lấy theo thể tích V chứa các từ môi, và tích phân thứ hai lấy theo tất cả các mặt giới hạn S của các từ môi.

Chúng ta biết rằng trong tự nhiên không có các "từ tích" vì vậy từ trường phụ trong từ môi phải do những dòng điện nào đó gây ra. Dòng điện dẫn do các điện tích tự do gây ra, còn dòng điện ở đây do các điện tích liên kết gây ra, các điện tích liên kết trong các phân tử gây ra điện tích này nên ta gọi nó là dòng phân tử (hay dòng liên kết). Đặt:

$$\langle \vec{j}_f \rangle = \mathrm{rot}\vec{I} \qquad (3.46)$$

gọi là mật độ dòng phân tử trung bình (mật độ dòng liên kết) và:

$$\langle \vec{i}_f \rangle = \left[\vec{n} \times \left(\vec{I}_2 - \vec{I}_1\right)\right] \qquad (3.47)$$

là mật độ dòng mặt phân tử trung bình (mật độ mặt dòng liên kết). Ta nói đến dòng trung bình vì dòng phân tử biến đổi rất nhanh theo tọa độ và thời gian, trong khi đó thì véctơ từ hóa $\vec{I}$ có một giá trị ổn định và phải do giá trị trung bình của các dòng phân tử gây ra. Biểu thức của $\vec{A}_t$ có dạng:

$$\vec{A}_t = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\langle \vec{j}_f \rangle}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\langle \vec{i}_f \rangle}{r} dS \qquad (3.48)$$

Và biểu thức của (3.45) có dạng:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} + \langle \vec{j}_f \rangle}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{i} + \langle \vec{i}_f \rangle}{r} dS \qquad (3.49)$$

Trong việc tạo ra từ trường phụ các dòng phân tử có vai trò giống như các dòng điện dẫn. Khác với dòng điện dẫn, các dòng phân tử gắn liền với sự có mặt của từ môi và chỉ xuất hiện ở trong các từ môi không đồng nhất hoặc từ trường không đồng nhất (đối với dòng phân tử trung bình) và trên mặt giữa hai từ môi hoặc giữa từ môi và chân không (đối với dòng mặt phân tử trung bình).

3.5.3 Mối liên hệ giữa độ cảm từ và độ từ thẩm

Trong chân không, từ trường do các dòng điện dẫn gây ra

$$\mathrm{rot}\vec{B}_0 = \mu_0\vec{j}$$

Trong từ môi từ trường do dòng điện dẫn và dòng phân tử gây ra. Nếu coi từ môi gồm dòng điện dẫn và dòng phân tử đặt trong chân không thì

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \mathrm{rot}\vec{I})$$
$$\mathrm{rot}\Big(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\Big) = \vec{j}$$

Trong từ môi thì $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$, do đó

$$\mathrm{rot}\Big(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\Big) = \mathrm{rot}\vec{H}$$
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{I} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\beta\vec{H}$$

Mặt khác $\vec{B} = \mu\vec{H}$, do đó ta có:

$$\mu = \mu_0(1 + \beta) \tag{3.50}$$

Độ từ thẩm tỷ đối:

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \beta \tag{3.51}$$

3.6 Năng lượng của từ trường dừng

3.6.1 Biểu diễn năng lượng của từ trường dừng qua thế véctơ

Ta đã biết mật độ năng lượng của từ trường dừng

$$w = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} \tag{3.52}$$

Do đó năng lượng của từ trường trong một thể tích V bất kỳ bằng:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\vec{B}\,dV \tag{3.53}$$

Ta có $\vec{H}\vec{B} = \vec{H}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{div}\,[\vec{A} \times \vec{H}\,] + \vec{A}\,\mathrm{rot}\vec{H} = \mathrm{div}[\vec{A} \times \vec{H}] + \vec{A}\,\vec{j}$. Do đó (3.53) có thể viết lại dạng

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{div}[\vec{A} \times \vec{H}\,]\,dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{j}\,dV \tag{3.54}$$

Nếu môi trường liên tục lấy mặt S là mặt bao hết toàn bộ từ trường, trên mặt S đó thì $[\vec{A} \times \vec{H}\,] = 0$, do đó $\int_V \mathrm{div}[\vec{A} \times \vec{H}\,]\,dV = \oint_S [\vec{A} \times \vec{H}\,]\,d\vec{S} = 0$. Vì vậy năng lượng của từ trường dừng là

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{A}\vec{j}\,dV \tag{3.55}$$

Nếu trong thể tích V có các mặt phân cách giữa các môi trường (tức là môi trường không liên tục) thì ta phải tách các mặt đó ra khỏi thể tích V lấy tích phân. Lý luận tương tự như mục 2.5.2 (Hình 2.5, trang 24) và sử dụng điều kiện biên $[\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)]=\vec{i}_N$ được:

$$\oint_{S'}[\vec{A}\times\vec{H}\,]\,d\vec{S}=\int_S\vec{A}\,[\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)]\,dS=\int_S\vec{A}\,\vec{i}_N\,dS$$

vậy năng lượng của từ trường dừng là::

$$W=\frac{1}{2}\int_S\vec{A}\,\vec{i}_N dS+\frac{1}{2}\int_V\vec{A}\,\vec{j}\,dV \tag{3.56}$$

Hai công thức (3.53) và (3.55) hoặc (3.56) tương đương nhau về mặt toán học, nhưng có ý nghĩa vật lý khác nhau.

Theo (3.53) năng lượng từ trường là năng lượng phân bố liên tục trong không gian với mật độ năng lượng xác định bằng (3.52)

Theo (3.55) hoặc (3.56) năng lượng từ trường là năng lượng tương tác giữa các dòng điện. Trong đó $\vec{j}\,dV$ hoặc $\vec{i}_N dS$ là dòng điện chảy trong nguyên tố dV hoặc $d\vec{l}$ và $\vec{A}$ là thế véctơ do tất cả các nguyên tố dòng khác gây ra tại điểm có nguyên tố dV hoặc dS. Ta nói được rằng năng lượng từ trường đúng bằng năng lượng tương tác của hệ dòng dừng sinh ra trường.

Đối với dòng tuyến tính chảy trong dây dẫn khép kín thì $\vec{j}\,dV=Id\vec{l}$ năng lượng của từ trường dừng là:

$$W=\frac{I}{2}\oint_{\mathcal{L}_i}\vec{A}\,d\vec{l} \tag{3.57}$$

3.6.2 Năng lượng của hệ dòng dừng. Hệ số tự cảm và hệ số hỗ cảm

Theo (3.57), năng lượng từ trường hệ dòng dừng tuyến tính

$$W=\frac{1}{2}\sum_i I_i\oint_{\mathcal{L}_i}\vec{A}\,d\vec{l} \tag{3.58}$$

Trong đó I_i là cường độ dòng điện trong dây dẫn thứ i và $\vec{A}$ là thế véctơ của hệ dòng tại các điểm chứa nguyên tố $d\vec{l}$ của dây thứ i. Áp dụng định lý Stokes

$$\oint_{\mathcal{L}_i}\vec{A}\,d\vec{l}=\int_{S_i}\mathrm{rot}\vec{A}\,d\vec{S}=\int_{S_i}\vec{B}\,d\vec{S}=\phi_i$$

ϕ_i là từ thông qua mặt S_i do dây dẫn thứ i giới hạn. Do đó:

$$W=\frac{1}{2}\sum_i I_i\phi_i \tag{3.59}$$

Nếu chỉ có một dây dẫn thì:

$$W=\frac{1}{2}I\phi \tag{3.60}$$

Trong đó ϕ là từ thông do chính dòng điện gây ra qua mặt mà nó giới hạn.

Trong phương trình (3.58) nếu ta thay $\vec{A}$ bằng giá trị của nó theo (3.35) được

$$W = \frac{\mu}{8\pi}\sum_{i,k} I_i I_k \oint_{\mathcal{L}_i}\oint_{\mathcal{L}_k}\frac{d\vec{l_i}\,d\vec{l_k}}{r} \tag{3.61}$$

Trong đó r là khoảng cách giữa hai nguyên tố $d\vec{l}$ và $d\vec{l}'$. Tích phân phải lấy theo chiều dài của tất cả các dây dẫn, ta phân tích nó thành tổng các tích phân theo từng dây dẫn. Trong đó r là khoảng cách giữa hai nguyên tố $d\vec{l_i}$ và $d\vec{l_k}$. Hai nguyên tố đó thuộc hai dây khác nhau khi $i \neq k$, thuộc cùng một dây khi $i = k$. Đặt

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{\mathcal{L}_i}\oint_{\mathcal{L}_k}\frac{d\vec{l_i}d\vec{l_k}}{r} \tag{3.62}$$

(3.61) viết được thành:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \tag{3.63}$$

Trong (3.62) các hệ số L_{ik} chỉ phụ thuộc hình dạng kích thước và vị trí tương đối của các dây dẫn, không phụ thuộc dòng điện chảy trong các dây dẫn đó. Do đó đối với mỗi hệ dây dẫn cố định, các hệ số L_{ik} có giá trị nhất định không đổi. Khi $i \neq k$, hệ số L_{ik} được gọi là *hệ số hỗ cảm* giữa dây i và dây k. Theo (3.62) dễ thấy $L_{ik} = L_{ki}$. Khi $i = k$, hệ số $L = L_{ii}$ gọi là *hệ số tự cảm* của dây thứ i. Công thức (3.62) dùng để tính các hệ số hỗ cảm của các dây[4] nhưng không dùng để tính hệ số tự cảm vì khi cho $i = k$ thì $r = 0$ và tích phân trở thành vô cực. Đối với một dây dẫn (3.63) trở thành

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \tag{3.64}$$

Trong đó L là hệ số tự cảm. Nếu tính được hoặc đo trực tiếp được W, có thể dùng (3.64) để tính ra hệ số tự cảm[5].

Đối chiếu (3.63) với (3.59) ta có:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i I_i \sum_k L_{ik} I_k = \frac{1}{2}\sum_i I_i \phi_i$$

Do đó

$$\phi_i = \sum_k L_{ik} I_k \tag{3.65}$$

Đối với một dây dẫn (3.65) trở thành:

$$\phi = LI \tag{3.66}$$

(3.65) và (3.66) thường dùng để tính hệ số hỗ cảm L_{ik} và hệ số tự cảm L .

[4]Phép tính hệ số hỗ cảm bằng (3.62) rất phức tạp nên nói chung người ta cũng hay dùng phương pháp thực nghiệm để suy ra hệ số hỗ cảm

[5]Đó là phương pháp thường dùng để tính hệ số tự cảm

3.7 Lực tác dụng trong từ trường dừng

3.7.1 Lực của từ trường

Thực nghiệm cho biết lực do từ trường tác dụng lên nguyên tố $\vec{j}\,dV$ là:

$$d\vec{F} = [\vec{j} \times \vec{B}]\,dV \tag{3.67}$$

Do đó lực tác dụng lên vật dẫn

$$\vec{F} = \int_V [\vec{j} \times \vec{B}]\,dV \tag{3.68}$$

Nếu ta có nguyên tố dòng tuyến tính $Id\vec{l}$ thì $d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$ lực tác dụng lên một đoạn dây dẫn

$$\vec{F} = I \int_{\mathcal{L}} [d\vec{l} \times \vec{B}] \tag{3.69}$$

Nếu có điện tích điểm q chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong từ trường thì lực từ tác dụng lên điện tích điểm q là:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] \tag{3.70}$$

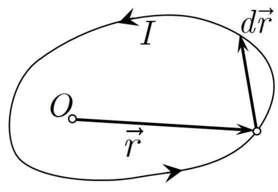
Chú ý rằng lực từ chỉ tác dụng lên điện tích chuyển động trong từ trường, nó không phải là loại lực xuyên tâm như lực của trường tĩnh điện hoặc các loại lực quen thuộc khác trong cơ học và từ trường không tác dụng lực nào lên điện tích đứng yên.

3.7.2 Lực từ tác dụng lên dòng nguyên tố

Xét một dòng nguyên tố nhỏ, không biến dạng và không làm thay đổi từ trường ngoài. Ta giả thiết rằng trong phạm vi kích thước của dòng, từ trường ngoài biến thiên rất ít. Chọn gốc O trong miền có dòng nguyên tố và gọi $\vec{B}(O)$ là cảm ứng từ tại gốc O (Hình 3.4), khai triển từ trường ngoài $\vec{B}(\vec{r}\,)$ theo chuỗi Taylor và bỏ qua các vô cùng bé bậc cao

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(O) + (\vec{r}\,\nabla)\vec{B}(O) + \cdots$$

Lực của từ trường ngoài tác dụng lên dòng nguyên tố bằng:



Hình 3.4:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= I \oint_{\mathcal{L}} [d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}\,)] \\ &= I \oint_{\mathcal{L}} [d\vec{r} \times \vec{B}(O)] + I \oint_{\mathcal{L}} \Big[d\vec{r} \times (\vec{r}\,\nabla)\vec{B}(\mathrm{O})\Big]\end{aligned}$$

do $\vec{B}(O)$ và $\oint d\vec{r} = 0$ là hằng số nên $\oint_{\mathcal{L}} [d\vec{r} \times \vec{B}(O)] = \Big[\big(\oint_{\mathcal{L}} d\vec{r}\big) \times \vec{B}(O)\Big] = 0$ nên

$$\vec{F} = I \oint_{\mathcal{L}} \Big[d\vec{r} \times (\vec{r}\,\nabla)\vec{B}(O)\Big] \tag{3.71}$$

Ta có

$$\oint_{\mathcal{L}} xdx = \oint_{\mathcal{L}} ydy = \oint_{\mathcal{L}} zdz = 0$$

$$xdy = \frac{1}{2}(xdy - ydx) + \frac{1}{2}(xdy + ydx)$$

$$xdy + ydx = \mathrm{grad}\,(xy)\,d\vec{r}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} (x\,dy + y\,dx) = \oint_{\mathcal{L}} \mathrm{grad}\,(xy)\,d\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,(xy)\,d\vec{S} = 0$$

nên

$$\oint_{\mathcal{L}} x\,dy = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{L}} (x\,dy - y\,dx)$$

Tương tự

$$\oint_{\mathcal{L}} x\,dz = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{L}} (x\,dz - z\,dx)\,; \quad \oint_{\mathcal{L}} y\,dz = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{L}} (y\,dz - z\,dy)$$

Chiếu (3.71) lên trục Oz

$$F_z = I\oint_{\mathcal{L}} \{dx(\vec{r}\nabla)B_y(O) - dy(\vec{r}\nabla)B_x(O)\}$$

$$F_z = I\oint \Big[dx\Big(x\frac{\partial B_y}{\partial x} + y\frac{\partial B_y}{\partial y} + z\frac{\partial B_y}{\partial z}\Big) - dy\Big(x\frac{\partial B_x}{\partial x} + y\frac{\partial B_x}{\partial y} + z\frac{\partial B_x}{\partial z}\Big)\Big]$$

$$F_z = I\Big[\oint xdx\frac{\partial B_y}{\partial x} + \oint ydx\frac{\partial B_y}{\partial y} + \oint zdx\frac{\partial B_y}{\partial z} - \oint xdy\frac{\partial B_x}{\partial x} - \oint ydy\frac{\partial B_x}{\partial y} - \oint zdy\frac{\partial B_x}{\partial z}\Big]$$

Để ý phép lấy đạo hàm của $\vec{B}$ tính tại gốc O nên phép tính đạo hàm độc lập với phép tính tích phân theo $d\vec{r}$. Do đó phép lấy đạo hàm của $\vec{B}(O)$ có thể đưa ra ngoài dấu tích phân. Tích phân thứ nhất và thứ năm của F_z bằng không vì chứa các tích phân $\oint xdx$ và $\oint ydy$. Các tích phân còn lại có thể được biến đổi nhờ các phép biến đổi trung gian

$$F_z = \frac{I}{2}\Big[\frac{\partial B_x}{\partial z}\oint(ydz - zdy) + \frac{\partial B_y}{\partial z}\oint(zdx - xdz) + \\ + \frac{\partial B_y}{\partial y}\oint(ydx - xdy) + \frac{\partial B_x}{\partial x}\oint(ydx - xdy)\Big]$$

Do $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ nên $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$ nên

$$F_z = \frac{I}{2}\Big[\frac{\partial B_x}{\partial z}\oint(ydz - zdy) + \frac{\partial B_y}{\partial z}\oint(zdx - xdz) + \frac{\partial B_z}{\partial z}\oint(xdy - ydx)\Big]$$

Theo định nghĩa của mômen từ (3.38) ta có

$$F_z = M_x\frac{\partial B_x}{\partial z} + M_y\frac{\partial B_y}{\partial z} + M_z\frac{\partial B_z}{\partial z} = \vec{M}\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$$

Vì dòng nguyên tố ta xét không biến dạng, mômen từ của nó không đổi nên

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\vec{M}\vec{B}\,)$$

Tương tự chiếu (3.71) xuống trục Ox và Oy ta được

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{M}\vec{B}\,);\;\; F_y = \frac{\partial}{\partial y}(\vec{M}\vec{B}\,)$$

Từ đó lực từ tác dụng lên dòng nguyên tố viết dưới dạng véctơ có dạng:

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\,(\vec{M}\vec{B}\,) \tag{3.72}$$

3.7.3 Năng lượng của dòng nguyên tố đặt trong từ trường ngoài

Ta có $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,W$, ở đây $W = U$ là thế năng của dòng nguyên tố đặt trong từ trường ngoài. Đối chiếu với (3.72)

$$W = U = -\vec{M}\vec{B} \tag{3.73}$$

3.7.4 Mômen lực tác dụng lên dòng nguyên tố

Gọi θ là góc giữa từ trường $\vec{B}$ và mômen từ của dòng nguyên tố $\vec{M}$ ta có

$$W = -MB\cos\theta \tag{3.74}$$

Lấy tọa độ suy rộng là góc θ thì lực suy rộng tương ứng là mômen lực $\vec{N}$

$$N = -\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(MB\cos\theta)$$

$$N = MB\sin\theta \tag{3.75}$$

Tác dụng của mômen lực lên dòng nguyên tố nó có xu hướng làm cho mômen từ $\vec{M}$ của dòng nguyên tố xoay trùng với phương của từ trường ngoài $\vec{B}$. Khi $\vec{M}$ cùng phương chiều với $\vec{B}$ thì thế năng của dòng nguyên tố đặt trong từ trường ngoài là cực tiểu (dòng nguyên tố ở trạng thái cân bằng bền). Khi $\vec{M}$ cùng phương ngược chiều với $\vec{B}$ thì thế năng của dòng nguyên tố đặt trong từ trường ngoài là cực đại (dòng nguyên tố ở trạng thái cân bằng không bền). Có thể viết lại (3.75) dưới dạng véctơ

$$\vec{N} = [\vec{M} \times \vec{B}\,] \tag{3.76}$$

Chương 4

Trường điện từ chuẩn dừng

Trong chương 2 và chương 3 chúng ta đã nghiên cứu các trường tĩnh và trường dừng là những trường không biến thiên theo thời gian. Đối với các trường này điện trường và từ trường là độc lập với nhau và ta có thể khảo sát chúng một cách riêng rẽ. Sau đây ta sẽ nghiên cứu các trường biến thiên theo thời gian. Các phương trình Maxwell (1.33) và (1.34) cho ta thấy mối liên hệ giữa từ trường và điện trường biến thiên theo thời gian, chúng không tồn tại độc lập với nhau và do đó không thể khảo sát riêng rẽ. Trong chương này sẽ khảo sát trường điện từ chuẩn dừng, đó là trường biến thiên chậm theo thời gian.

4.1 Các phương trình của trường chuẩn dừng

4.1.1 Các điều kiện chuẩn dừng

Trường chuẩn dừng là trường biến thiên chậm theo thời gian, thỏa mãn hai điều kiện sau:

Điều kiện chuẩn dừng thứ nhất: Dòng điện dịch rất nhỏ, có thể bỏ qua được so với dòng điện dẫn.

$$\left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|_{\max} \ll |\vec{j}\,|_{\max} \tag{4.1}$$

Điều kiện chuẩn dừng thứ hai: Trong miền quan sát có thể bỏ qua hiệu ứng trễ, phụ thuộc vào vận tốc truyền hữu hạn của sóng điện từ.

Xét ví dụ về trường hợp thường gặp là trường biến thiên điều hòa với tần số góc bằng ω khi đó

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega\varepsilon \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}; \quad \vec{j} = \lambda \vec{E} = \lambda \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

Do đó điều kiện chuẩn dừng thứ nhất có thể viết lại

$$\omega\varepsilon \ll \lambda \quad \Leftrightarrow \omega \ll \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

Đối với dây dẫn bằng kim loại $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ và $\lambda \approx 10^7\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ do đó $\frac{\lambda}{\varepsilon} \approx 10^{18}\mathrm{s}^{-1}$, điều kiện chuẩn dừng thứ nhất tương ứng với $\omega \ll 10^{18}\mathrm{s}^{-1}$ hay $\gamma \ll 10^{17}\mathrm{Hz}$ và bước sóng $\ell \gg 10^{-9}\mathrm{m}$. Như vậy đối với dòng xoay chiều và sóng vô tuyến điện đều thỏa mãn điều kiện chuẩn dừng thứ nhất.

Giả sử điện trường biến thiên kể trên truyền đi theo trục x với vận tốc c dưới dạng sóng phẳng đơn sắc. Điện trường tại điểm quan sát cách nguồn một khoảng x

$$E(x,t) = E_0 \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{c}}\right)\right\} = E_0\mathrm{e}^{i\omega t}\exp\left(i\omega\frac{x}{\mathrm{c}}\right) = E_0\mathrm{e}^{i\omega t}\left\{1 - i\frac{\omega x}{\mathrm{c}} + \cdots\right\}$$

Ta thấy rằng nếu $\frac{\omega x}{\mathrm{c}} \ll 1$ thì $E(x,t)$ có dạng $\vec{E} = \vec{E}_0\mathrm{e}^{i\omega t}$, hay ta có thể bỏ qua hiệu ứng trễ. Khi đó

$$\frac{\omega}{\mathrm{c}} = \frac{2\pi}{\mathrm{c}T} = \frac{2\pi}{\ell}$$

Trong đó T là chu kỳ dao động của sóng điện từ, điều kiện chuẩn dừng thứ hai có dạng

$$x \ll \ell$$

Nghĩa là kích thước miền quan sát phải rất nhỏ so với bước sóng khảo sát.

Dòng điện xoay chiều trong kỹ thuật có tần số cỡ 50Hz ứng với bước sóng 6000km và những sóng vô tuyến điện thường có bước sóng từ vài chục mét đến vài nghìn mét thì phần lớn điện từ trường dùng trong vô tuyến điện kỹ thuật và nhất là trong điện kỹ thuật đều thuộc lĩnh vực trường chuẩn dừng.

4.1.2 Các phương trình của trường chuẩn dừng

Nếu bỏ qua dòng điện dịch so với dòng điện dẫn các phương trình Maxwell viết cho trường chuẩn dừng có dạng:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} \tag{4.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{4.4}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{4.5}$$

Các phương trình liên hệ

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}; \qquad \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{(n)})$$

Phương trình liên tục trong trường chuẩn dừng có dạng

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{D}) = \mathrm{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \approx \mathrm{div}\vec{j}$$

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0$$

4.1.3 Thế véctơ và thế vô hướng của trường điện từ chuẩn dừng

Nếu $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ là hàm véctơ của cả tọa độ và thời gian và thỏa mãn

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \tag{4.6}$$

gọi là thế véctơ của trường điện từ chuẩn dừng. Đối với thế véctơ $\vec{A}$ ta cũng đặt điều kiện định cỡ

$$\text{div}\vec{A} = 0 \tag{4.7}$$

Từ phương trình (4.2) rút ra

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{A} = \text{rot}\Big(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big) = 0$$

$\vec{E}$ không phải là véctơ thế mà $\Big(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big)$ mới là véctơ thế. Đặt $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\,\text{grad}\,\varphi$ hay:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{4.8}$$

trong đó $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ là hàm vô hướng của tọa độ và thời gian và được gọi là thế vô hướng của trường điện từ chuẩn dừng. Nó cũng được định cỡ giống như thế vô hướng của trường tĩnh điện.

4.1.4 Các phương trình vi phân của thế

Phương trình vi phân của thế vô hướng

Ta có $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$. Thay $\vec{E}$ trong (4.8) ta có $\text{div}\Big(-\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big) = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon}$. Sử dụng điều kiện định cỡ (4.7) ta có:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.9}$$

(4.9) là phương trình Poisson của thế vô hướng của trường điện từ chuẩn dừng, có dạng tương tự như đối với trường tĩnh điện.

Phương trình vi phân của thế véctơ

Ta có $\text{rot}\vec{B} = \mu\vec{j}$. Thay $\vec{B}$ trong (4.6) ta có $\text{rot}\,(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}\,\text{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j}$. Sử dụng điều kiện định cỡ (4.7) ta có:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \tag{4.10}$$

(4.10) là phương trình Poisson đối với thế véctơ.

4.2 Các mạch chuẩn dừng

4.2.1 Hệ dây dẫn có cảm ứng điện từ

Xét một hệ gồm nhiều dây dẫn liên kết hỗ cảm với nhau. Do hiện tượng cảm ứng điện từ, dòng điện chảy trong mỗi dây dẫn phụ thuộc vào các dòng khác trong dây dẫn khác. Áp dụng định luật Ohm suy rộng (3.7) cho dây dẫn thứ i và viết nó dưới dạng tích phân tương tự như (3.8)

$$\oint_{\ell_i} \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = \oint_{\ell_i} \vec{E}\, d\vec{l} + \oint_{\ell_i} \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l} \tag{4.11}$$

Theo (3.10) thì

$$\oint_{\ell_i} \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = I_i R_i$$

Tích phân thứ hai ở vế phải của (4.11) là thế điện động ngoại lai trên dây thứ i.

$$\oint_{\ell_i} \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l} = \mathcal{E}_{(n)i}$$

Sử dụng $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, tích phân thứ nhất trong vế phải của (4.11) có thể biến đổi được thành:

$$\oint_{\ell_i} \vec{E}\, d\vec{l} = -\oint_{\ell_i} \text{grad}\varphi\, d\vec{l} - \oint_{\ell_i} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\, d\vec{l}$$

Để ý

$$\oint_{\ell_i} \text{grad}\varphi\, d\vec{l} = \oint_{\ell_i} d\varphi = 0$$

$$\oint_{\ell_i} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\, d\vec{l} = \frac{d}{dt} \oint_{\ell_i} \vec{A}\, d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_{S_i} \text{rot}\vec{A}\, d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_{S_i} \vec{B}\, d\vec{S} = \frac{d\phi_i}{dt}$$

Trong đó ϕ_i là từ thông qua mặt S_i do dây dẫn thứ i giới hạn. Nên (4.11) viết lại

$$I_i R_i = \mathcal{E}_{(n)i} - \frac{d\phi_i}{dt} \tag{4.12}$$

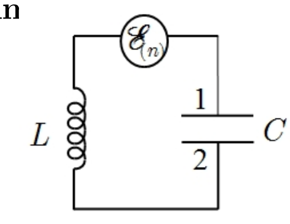
Theo (3.65) ta có $\phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$. Do đó (4.12) cũng viết được thành:

$$I_i R_i = \mathcal{E}_{(n)i} - \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} \tag{4.13}$$

Nếu ta có một hệ gồm N dây dẫn và các lượng R_i, L_{ik} và $\mathcal{E}_{(n)i}$ là cho trước, ta viết được một hệ phương trình theo kiểu (4.13) chứa N ẩn $I_1, I_2 \ldots I_N$. Hệ phương trình đó cho phép tính được cường độ dòng điện trong từng dây dẫn.

4.2.2 Mạch điện có điện dung và tự cản

Trên hình 4.1 là một mạch điện đơn giản có điện dung C và độ tự cảm L. lấy tích phân định luật Ohm suy rộng (3.7) dọc theo mạch điện từ bản này đến bản kia của tụ điện (từ điểm 1 đến điểm 2)



Hình 4.1:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l}$$

Thực hiện các phép biến đổi

$$\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_1^2 \mathrm{grad}\varphi\, d\vec{l} - \frac{d}{dt}\int_1^2 \vec{A}\, d\vec{l}$$

$$\int_1^2 \mathrm{grad}\varphi\, d\vec{l} = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Vì thế véctơ $\vec{A}$ là một hàm liên tục và khoảng cách giữa hai bản tụ điện (điểm 1 và điểm 2) là rất nhỏ so với độ dài của toàn mạch, ta có thể coi tích phân $\int_1^2 \vec{A}\, d\vec{l}$ là tích phân theo đường kín.

$$\int_1^2 \vec{A}\, d\vec{l} = \oint \vec{A}\, d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\vec{A}\, d\vec{S} = \int_S \mathrm{rot}\vec{B}\, d\vec{S} = \phi$$

Trong đó ϕ là từ thông qua mặt do mạch điện (bao gồm cả khoảng cách rất nhỏ giữa hai bản của tụ điện) giới hạn. kết quả ta có:

$$IR = \mathcal{E}_{(n)} - (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{d\phi}{dt} \tag{4.14}$$

Gọi q là điện tích trên tụ, ta có $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{q}{C}$ và $\phi = LI$ do đó (4.14) thành:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} + RI = \mathcal{E}_{(n)} \tag{4.15}$$

Lấy đạo hàm (4.15) theo thời gian và chú ý rằng $\dfrac{dq}{dt} = I$ ta có:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{(n)} \tag{4.16}$$

Nếu biết trước $\mathcal{E}$, R, L, C giải phương trình (4.16) sẽ tính được cường độ dòng điện I trong mạch. Phương trình (4.15) còn có thể viết dưới dạng:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_{(n)} \tag{4.17}$$

Nếu biết trước $\mathcal{E}$, R, L, C giải phương trình này sẽ tính được điện tích q của tụ điện.

Ở trên ta viết các phương trình cho một mạch điện có chứa điện dung và tự cảm. Trong trường hợp nếu có một hệ gồm N mạch điện kiểu như trên thì ta có thể viết được các phương trình cho mạch điện thứ i như sau:

$$I_iR_i = \mathcal{E}_{(n)i} - (\varphi_2 - \varphi_1)_i - \frac{d\phi_i}{dt}$$

Thay $\phi_i = \sum_k L_{ik}I_k$ ta có:

$$I_iR_i + \frac{q_i}{C_i} + \frac{d}{dt}\Big(\sum_k L_{ik}I_k\Big) = \mathcal{E}_{(n)i} \tag{4.18}$$

Lấy đạo hàm hai vế (4.18) theo thời gian ta có:

$$\sum_{k=1}^{N} L_{ik}\frac{d^2I_k}{dt^2} + R_i\frac{dI_i}{dt} + \frac{I_i}{C_i} = \frac{d\,\mathcal{E}_{(n)i}}{dt} \tag{4.19}$$

Thay $i = 1, 2 \ldots N$ ta được hệ N phương trình vi phân xác định các dòng I_i trên mỗi mạch. Nếu biết trước $\mathcal{E}_{(n)i}$, R_i, L_{ik}, C_i giải hệ N phương trình (4.19) sẽ tính được cường độ dòng điện I_i trong mỗi mạch.

Nếu biểu diễn qua điện tích trên các tụ ta có:

$$\sum_{k=1}^{N} L_{ik}\frac{d^2q_k}{dt^2} + R_i\frac{dq_i}{dt} + \frac{q_i}{C_i} = \mathcal{E}_{(n)i} \tag{4.20}$$

Thay $i = 1, 2 \ldots N$ ta được hệ N phương trình vi phân xác định điện tích q_i trên tụ C_i của mạch thứ i. Tương tự nếu biết trước $\mathcal{E}_{(n)i}$, R_i, L_{ik}, C_i giải hệ N phương trình (4.20) sẽ tính được điện tích q_i trên tụ C_i của mạch thứ i.

4.2.3 Các ví dụ

Ví dụ 1

Xét một mạch điện chỉ có R, L không có C. Tại thời điểm $t = 0$ ta tác dụng vào mạch một thế điện động ngoại lai không đổi $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_0 = \mathrm{const}$. *Tính cường độ dòng điện chảy trong mạch.*

Áp dụng phương trình (4.15), ta có:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0$$

Với điều kiện ban đầu $I(0) = 0$. Nghiệm của tổng quát của phương trình vi phân trên có dạng

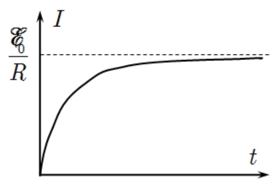
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

Sử dụng điều liện đầu $I(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + A = 0 \Longrightarrow A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$. Do đó

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Ta thấy rằng cường độ dòng điện I trong mạch tăng theo thời gian, khi t khá lớn để có thể coi $t \longrightarrow \infty$ thì $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$. Dòng I_0 gọi là *dòng ổn định*. Còn dòng $I_c = I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ xuất hiện do hiện tượng tự cảm, nó được gọi là *dòng cảm ứng*

Hình 4.2 là đồ thị của I. Khi đóng mạch điện có thể coi dòng điện I chảy trong mạch là tổng của hai dòng: dòng ổn định I_0 và dòng cảm ứng $I_c = I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$. Dòng cảm ứng chảy ngược chiều với dòng ổn định và tắt dần theo thời gian. Sau mỗi khoảng thời gian $\triangle t = \frac{L}{R}$ nó giảm e lần.



Hình 4.2:

Trong trường hợp ta ngắt mạch điện (lúc đầu có $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_{(0)} = \mathrm{const}$) bài toán cũng được giải tương tự như trên. Bây giờ phương trình (4.15) trở thành:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

Với điều kiện ban đầu $I(0) = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{R}$. Nghiệm của phương trình vi phân với điều kiện đầu trên là:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

Nghĩa là ngay sau khi ngắt mạch điện thì cường độ dòng điện trong mạch không lập tức bị tắt (bằng 0) mà do hiện tượng tự cảm nó tắt dần theo quy luật hàm mũ (Hình **??**)

Ví dụ 2

Xét dòng điện chảy trong một mạch có L, C và điện trở nhỏ không đáng kể $R = 0$ trong trường hợp không có thế điện động ngoại lai $\mathcal{E}_{(n)} = 0$.

Trong trường hợp này phương trình (4.16) có dạng:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0$$

Nghiệm của tổng quát của phương trình vi phân trên có dạng

$$I = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Trong đó ω là tần số góc của dòng điện

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A và B là biên độ của dao động, có giá trị xác định bằng những điều kiện ban đầu. Như vậy dòng điện trong mạch dao động với chu kỳ bằng:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Dao động đó có thể được kích thích lúc đầu bằng cảm ứng điện từ và những điều kiện kích thích sẽ xác định biên độ A và B. Một mạch điện như trên gọi là *mạch dao động* và dòng điện trong mạch không bao giờ tắt.

Trong thực tế mạch bao giờ cũng có một giá trị điện trở nào đó, dù rất nhỏ và dòng điện trong mạch là dòng tắt dần vì năng lượng của dòng điện biến dần thành nhiệt năng theo định luật Joule – Lentz.

Ví dụ 3

Xét dòng điện chảy trong mạch có R, L, C trong trường hợp thế điện động ngoại lai biến thiên tuần hoàn với tần số góc ω theo quy luật $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_{(0)}\cos(\omega t)$.

Viết $\mathcal{E}_{(n)}$ lại dưới dạng phức $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_{(0)}\mathrm{e}^{-i\omega t}$ và tìm nghiệm của (4.16) dưới dạng:

$$I(t) = I_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Thay nghiệm $I(t)$ vào (4.16) và thực hiện các phép đạo hàm được phương trình:

$$\left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]I = \mathcal{E}_{(n)}$$

Đặt $Z^* = Z\mathrm{e}^{-i\alpha} = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, định luật Ohm cho toàn mạch có dạng

$$I = \frac{\mathcal{E}_{(n)}}{Z^*}$$

Trong đó Z^* gọi *trở kháng phức* và Z là *trở kháng* của mạch. Ta có

$$\begin{aligned} Z^2 = Ze^{-i\alpha}Ze^{i\alpha} &= \left[R - i\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)\right]\left[R + i\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)\right] \\ &= R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \end{aligned}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Mặt khác $Ze^{-i\alpha} = Z\cos\alpha - iZ\sin\alpha = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ do đó

$$\cos\alpha = \frac{R}{Z}; \qquad \sin\alpha = \frac{1}{Z}\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big); \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{R}\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)$$

Từ đó

$$I = \frac{\mathcal{E}_{(0)}e^{-i\omega t}}{Ze^{-i\alpha}} = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{Z}e^{-i(\omega t - \alpha)}$$

Hay viết dưới dạng lượng giác

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{Z}\cos(\omega t - \alpha)$$

Dòng điện trong mạch cũng dao động với tần số ω như dao động của thế điện động ngoại lai, nhưng nó lệch pha so với thế điện động ngoại lai. Độ lệch pha α phụ thuộc vào R, L, C và tần số ω của thế điện động ngoại lai. Độ lệch pha $\alpha = 0$ khi $\mathrm{tg}\alpha = 0$ tức là khi:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

Trong trường hợp đó trong mạch có *hiện tượng cộng hưởng* và tần số ω_0 gọi là *tần số cộng hưởng*. Khi đó

$$Z = Z_{\min} = R; \quad I = I_{0\,\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

4.3 Hiệu ứng mặt ngoài

Chúng ta biết rằng dòng điện không đổi được phân bố đều theo tiết diện của dây dẫn. Nhưng đối với dòng điện biến thiên, sự phân bố thay đổi khác hẳn, phần lớn dòng điện tập trung ở lớp ngoài của dây dẫn và tần số của dòng điện càng lớn thì lớp ngoài của dây dẫn chứa dòng điện càng mỏng. Hiện tượng đó gọi là *hiệu ứng mặt ngoài*[1].

Giả sử ta có một dây dẫn đồng chất và vô hạn chiếm một nửa không gian ứng với $z \geq 0$, và dòng điện chảy theo phương trục x song song với mặt ngoài của dây dẫn. Dòng điện biến thiên tuần hoàn theo thời gian với tần số góc bằng ω và chỉ là hàm của một tọa độ z theo

$$\vec{j} = \vec{j}(z,t) = \vec{J}_0(z)e^{i\omega t} \tag{4.21}$$

[1]cũng gọi là hiệu ứng lớp da

Các thành phần của nó là:

$$j_x = J_0(z)\mathrm{e}^{i\omega t};\; j_y = j_z = 0 \tag{4.22}$$

Sử dụng các phương trình Maxwell

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j};\quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

lấy đạo hàm theo thời gian phương trình đầu kết hợp với phương trình thứ hai ta có:

$$\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{E} + \frac{1}{\mu}\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

Vì trong dây dẫn $\vec{j} = \lambda\vec{E}$ và từ phương trình liên tục $\mathrm{div}\vec{j} = \mathrm{div}\lambda\vec{E} = 0$ ta có

$$\nabla^2\vec{j} = \lambda\mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} \tag{4.23}$$

Theo giả thiết $\vec{j}$ chỉ có một thành phần $j_x(z) = J_0(z)\mathrm{e}^{i\omega t} \neq 0$ nên (4.23) trở thành

$$\frac{\partial^2 J_0(z)}{\partial z^2} = 2ip^2 J_0(z) \tag{4.24}$$

trong đó

$$p^2 = \frac{1}{2}\lambda\mu\omega \tag{4.25}$$

Nghiệm tổng quát của (4.24) là

$$J_0(z) = A_0\mathrm{e}^{\sqrt{2ip^2}\,z} + B_0\mathrm{e}^{-\sqrt{2ip^2}\,z}$$

Chú ý rằng $\sqrt{2ip^2} = p\sqrt{2i} = p(1+i)$ nên

$$J_0(z) = A_0\mathrm{e}^{pz}\mathrm{e}^{ipz} + B_0\mathrm{e}^{-pz}\mathrm{e}^{-ipz} \tag{4.26}$$

Số hạng thứ nhất của (4.26) dần tới vô cùng khi z dần tới vô cùng, điều đó không có ý nghĩa vật lý. Vì vậy phải chọn $A_0 = 0$ và (4.26) trở thành

$$J_0(z) = B_0 e^{-pz}e^{-ipz} \tag{4.27}$$

Khi $z = 0$ thì $B_0 = \mathbb{J}_0$ là biên độ của dòng điện tại mặt ngoài của dây dẫn. Do đó

$$J_0(z) = \mathbb{J}_0 e^{-pz}e^{-ipz}$$
$$j_x = J_0(z)\mathrm{e}^{i\omega t} = \mathbb{J}_0 e^{-pz}\mathrm{e}^{i(\omega t - pz)}$$

Biểu diễn dưới dạng lượng giác

$$j_x = \mathbb{J}_0\mathrm{e}^{-pz}\cos(\omega t - pz) \tag{4.28}$$

Như vậy càng đi sâu vào trong dây dẫn thì biên độ dòng điện càng giảm theo quy luật hàm mũ. Ở độ sâu $d = \frac{1}{p}$ biên độ dòng điện giảm đi e lần so với giá trị của nó ở mặt ngoài. Theo (4.25) ta có

$$d = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{1}{\lambda\mu\omega}} = \sqrt{\frac{T}{\pi\lambda\mu}} \tag{4.29}$$

Nhận xét

1. Đối với kim loại $\mu \approx \mu_0,\ \lambda \approx 10^7\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ và với dòng điện có $T = 10^{-5}$s ứng với bước sóng $\ell = \mathrm{c}T = 3$km ta tính được $d \approx 0,5$mm. Đối với dòng điện có tần số rất cao ω rất lớn thì $d \to 0$ tức là dòng điện chỉ tập trung ở lớp mỏng bên ngoài của dây dẫn. Đối với dòng điện không đổi $\omega = 0$ thì $d \to \infty$, tức là không có hiệu ứng mặt ngoài.

2. Điện trở của dây dẫn được tính theo công thức

$$R = \int \frac{dl}{\lambda S}$$

   S là tiết diện dây dẫn. Ở tần số càng cao dòng điện tập trung ở lớp ngoài của dây dẫn nên tiết diện của nó giảm và điên trở của nó tăng. *Tần số dòng điện chảy dây dẫn càng cao càng cao thì điện trở dây dẫn càng lớn.*

3. Năng lượng từ trường của dòng điện là

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

   L là hệ số tự cảm của dây dẫn. Nếu dòng điện chảy theo lớp ngoài của dây dẫn thì từ trường ở bên trong dây dẫn bằng không, còn từ trường ở phía bên ngoài dây không thay đổi. Như vậy năng lượng của từ trường bên trong dây dẫn giảm đi, còn năng lượng của từ trường bên ngoài dây vẫn như cũ. Kết quả là năng lượng toàn phần giảm đi trong khi độ lớn dòng điện không đổi. Nên thì hệ số tự cảm của dây cũng giảm. *Tần số của dòng điện trong chảy dây dẫn càng cao thì hệ số tự cảm của nó càng nhỏ.*

4.4 Năng lượng của các mạch chuẩn dừng

Xuất phát tư phương trình (4.18), nhân hai vế của nó với I_i và lấy tổng theo tất cả các mạch điện ta được:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k + \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i^2}{C_i}\Big) + \sum_i RI_i^2 = \sum_i \mathcal{E}_{(n)i}I_i$$

Hay

$$\frac{dW}{dt} + Q = N_0 \tag{4.30}$$

Trong đó

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k + \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i^2}{C_i} \tag{4.31}$$

là năng lượng từ trường của tất cả các cuộn dây và năng lượng điện trường của tất cả tụ điện trong hệ mạch.

$$Q = \sum_i RI_i^2 \tag{4.32}$$

là nhiệt lượng Joule – Lentz tỏa ra trên tất cả các mạch.

$$N_0 = \sum_i \mathcal{E}_{(n)i} I_i \tag{4.33}$$

(4.30) là biểu thức của định luật bảo toàn năng lượng đối với hệ các mạch chuẩn dừng.

Công suất của trường lạ thực hiện đối với các dòng điện trong hệ mạch bằng sự biến đổi năng lượng trường điện từ trong hệ mạch trong một đơn vị thời gian và nhiệt lượng Joule – Lentz do hệ mạch tỏa ra.

Chương 5

Sóng điện từ

Điện trường và từ trường trong trường điện từ tĩnh và dừng chỉ tồn tại khi có các nguồn là điện tích và dòng điện. Chúng không thể tồn tại biệt lập khỏi nguồn này. Trong trường điện từ chuẩn dừng ta cũng mới chỉ xét hiện tượng cảm ứng điện từ, tức là sự gây ra điện trường do từ trường biến thiên theo thời gian, mà chưa xét đến sự xuất hiện từ trường do điện trường biến thiên. Nhưng đối với trường điện từ biến thiên nhanh ta xét đầy đủ cả hai quá trình tương tác giữa điện trường và từ trường. Do đó trường điện từ biến thiên nhanh có thể tồn tại biệt lập khỏi các nguồn là điện tích và dòng điện dưới dạng sóng điện từ. Sóng điện từ là trường điện từ tự do lan truyền trong không gian hay trường điện từ biến thiên nhanh theo tọa độ và thời gian biệt lập khỏi các nguồn.

5.1 Các phương trình của trường điện từ biến thiên nhanh

5.1.1 Các phương trình của trường biến thiên nhanh

Nếu muốn nghiên cứu sự bức xạ sóng điện từ, tức là nghiên cứu đến những nguyên nhân phát sinh ra sóng điện từ, ta phải dùng các phương trình Maxwell tổng quát nhất, trong đó phải xét đến điện tích và dòng điện

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{5.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{5.4}$$

và các phương trình liên hệ

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

5.1.2 Thế vô hướng và thế vectơ của trường điện từ biến thiên nhanh

Tương tự với trường điện từ chuẩn dừng, khi chỉ có các nguồn điện ta có thể đưa vào thế vô hướng φ và thế vectơ $\vec{A}$ theo các công thức sau:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \tag{5.5}$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5.6}$$

Dễ thấy rằng thế vô hướng φ và thế vectơ $\vec{A}$ xác định trường điện từ theo (5.5) và (5.6) là không đơn trị. Thật vậy nếu ta cho một hàm vô hướng bất kì của tọa độ và thời gian $u(\vec{r}, t)$ thì

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,u$$

cũng là thế của trường điện từ đó. Thật vậy

$$\vec{B}' = \mathrm{rot}\vec{A}' = \mathrm{rot}\,(\vec{A} + \mathrm{grad}\,u) = \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\mathrm{grad}\,\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\mathrm{grad}\Big(\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\vec{A} + \mathrm{grad}\,u\Big) = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

như vậy các thế φ' và $\vec{A}'$ cũng mô tả trường điện từ như các thế φ và $\vec{A}$

Đối với trường điện từ biến thiên nhanh chúng ta sử dụng điều kiện định cỡ Lorentz:

$$\mathrm{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{5.7}$$

5.1.3 Phương trình vi phân của thế vô hướng và thế vectơ

Ta có

$$\mathrm{rot}\mu\vec{H} = \mu\vec{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sử dụng thế vectơ $\vec{A}$ và thế vô hướng φ theo (5.5) và (5.6) ta có

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \mu\vec{j} + \varepsilon\mu\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(-\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big)$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j} - \varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\Big(\mathrm{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big) = -\mu\vec{j}$$

Sử dụng điều kiện định cỡ Lorentz (5.7) ta có

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \tag{5.8}$$

Thay $\vec{E}$ trong (5.5) vào phương trình $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ ta có

$$\mathrm{div}\Big(-\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A} = \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Theo điều kiện định cỡ Lorentz $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$. Do đó

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.9}$$

Các phương trình (5.8) và (5.9) được gọi là các phương trình vi phân của thế vectơ và thế vô hướng của trường điện từ biến thiên nhanh.

5.1.4 Nghiệm của phương trình thế. Thế trễ

Các phương trình (5.8) và (5.9) có thể viết chung lại dưới dạng:

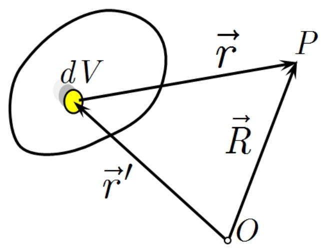
$$\nabla^2\psi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -f(\vec{r}\,', t) \tag{5.10}$$

trong đó ψ là thế vectơ $\vec{A}$ hoặc thế vô hướng φ và $f(\vec{r}\,', t)$ là $\mu\vec{j}$ hoặc $\frac{\rho}{\varepsilon}$. Phương trình (5.10) gọi là phương trình sóng d' Alembert có vế phải.

Nếu $f(\vec{r}\,', t) = 0$ trong toàn thể không gian ta xó phương trình d'Alembert không có vế phải, đó là phương trình của dòng điện từ tự do ta sẽ nghiên cứu sau này. Nếu $f(\vec{r}\,', t) \neq 0$ trong một miền V hữu hạn nào đó của không gian thì nghiệm của phương trình Đalămbe đối với toàn không gian có dạng:

$$\psi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{f\left(\vec{r}\,', t \pm \dfrac{r}{v}\right)}{r}\, dV \tag{5.11}$$

Trong đó $\vec{R}$ là bán kính vectơ của điểm quan sát, t là thời điểm quan sát, $\vec{r}\,'$ là bán kính vectơ của thể tích dV (chứa $\vec{j}$ hoặc ρ), $|\vec{r}| = |\vec{R} - \vec{r}\,'|$ là khoảng cách từ nguyên tố thể tích dV tới điểm quan sát (Hình 5.1) và $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ là vận tốc truyền sóng điện từ.



Hình 5.1:

Trong nghiệm (5.11) hàm $\psi(\vec{R}, t)$ biểu diễn trạng thái điện từ trường và $f\left(\vec{r}\,', t \pm \frac{r}{v}\right)$ là hàm biểu diễn trạng thái nguồn gây ra điện từ trường. Như vậy trạng thái của điện từ trường tại thời điểm t do trạng thái của nguồn tại thời điểm $\left(t \pm \frac{r}{v}\right)$ xác định.

Xét các nghiệm

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\, dV \tag{5.12}$$

$$\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\, dV \tag{5.13}$$

Do đó vi phân thế véctơ $d\vec{A}$ do nguồn nguyên tố $\vec{j}\,dV$ và vi phân thế vô hướng $d\varphi$ do nguồn nguyên tố $\rho\,dV$ gây ra là

$$d\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\, dV$$

$$d\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\, dV$$

Thế $d\vec{A}$ tại thời điểm t phụ thuộc giá trị của mật độ dòng điện $\vec{j}$ của nguồn tại thời điểm $\left(t - \frac{r}{v}\right)$, tức là trước thời điểm t một khoảng thời gian là $\Delta t = \frac{r}{v}$. Thời gian đó chính là thời gian cần thiết để sóng truyền từ nguồn tới điểm quan sát. Tương tự đối với thế vô hướng $d\varphi$ cũng như vậy.

Trong trường hợp này sự biến thiên của thế tại điểm quan sát xảy ra muộn hơn so với biến thiên của nguồn, cho nên thế tại điểm quan sát được gọi là thế trễ. Thế trễ truyền đi từ nguồn theo mọi phương của không gian.

Xét các nghiệm

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV \tag{5.14}$$

$$\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV \tag{5.15}$$

Do đó vi phân thế véctơ $d\vec{A}$ do nguồn nguyên tố $\vec{j}\,dV$ và vi phân thế vô hướng $d\varphi$ do nguồn nguyên tố $\rho\,dV$ gây ra là

$$d\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV$$

$$d\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV$$

Ta thấy rằng giá trị của thế tại điểm quan sát vào thời điểm t, phụ thuộc giá trị của nguồn vào thời điểm $\left(t + \frac{r}{v}\right)$, tức là sau thời điểm t một khoảng thời gian là $\frac{r}{v}$.

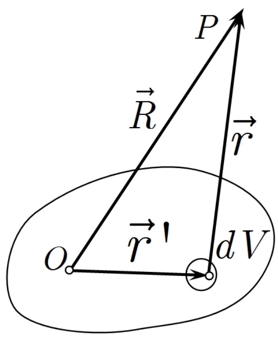
Trong trường hợp này sự biến thiên của thế tại điểm quan sát xảy ra sớm hơn so với biến thiên của nguồn, cho nên thế được gọi là thế sớm. Thế sớm truyền từ mọi phương của không gian về nguồn. Nó không có ý nghĩa vật lí như thế trễ nên nó ít được dùng đến.

5.2 Sự bức xạ của lưỡng cực

5.2.1 Định nghĩa lưỡng cực bức xạ

Xét hệ điện tích trung hoà nằm trong một miền không gian V, trong đó mật độ điện tích và mật độ dòng điện ở từng điểm biến thiên theo thời gian

$$\rho = \rho\,(\vec{r},t)\,;\quad \vec{j} = \vec{j}\,(\vec{r},t)$$



Hình 5.2:

nhưng không có điện tích và dòng điện đi ra ngoài hoặc vào trong miền V. Một hệ như vậy sẽ là một nguồn bức xạ điện từ. Vì ta có thể coi hệ đó như một lưỡng cực biến thiên theo thời gian, nên nó được gọi là lưỡng cực bức xạ. Chúng ta xét một điểm quan sát P ở cách xa lưỡng cực, và chọn góc toạ độ trong miền V (Hình 5.2). Ta có $R \gg r'\,, r \gg r'$ và $R \approx r$. Giả sử lưỡng cực được đặt trong chân không hoặc trong không khí, trong (5.12) và

(5.13) thay $\varepsilon = \varepsilon_0,\ \mu = \mu_0$ và $v = \mathrm{c} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Sử dụng chúng có thể tính thế của điện từ trường do lưỡng cực bức xạ ra.

5.2.2 Thế vô hướng của lưỡng cực bức xạ

Theo (5.13) ta có

$$\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{r}{\mathrm{c}}\right)}{r}\, dV$$

Vì $r = |\vec{R} - \vec{r}\,'|$ và $r' \ll R$, ta có thể khai triển lượng trong dấu tích phân theo chuỗi Taylor

$$\frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{r}{\mathrm{c}}\right)}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} = \frac{\rho^*}{R} - (\vec{r}\,'\nabla)\frac{\rho^*}{R} + \cdots = \frac{\rho^*}{R} - \nabla\frac{\vec{r}\,'\rho^*}{R} + \cdots$$

trong đó $\rho^* = \rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)$. Chú ý rằng trong (5.12) và (5.13) và các công thức khác rút ra từ chúng, tích phân ở vế phải lấy theo dV là hàm của $\vec{r}$, nên khi lấy tích phân ta coi R là hằng số. Do đó

$$\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_V \rho^*\, dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{R}\int_V \vec{r}\,'\rho^*\, dV \tag{5.16}$$

tích phân thứ nhất trong vế phải (5.16) bằng không vì hệ là trung hòa. Tích phân thứ hai là giá trị của mômen lưỡng cực của hệ tại thời điểm $\left(t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)$

$$\int_V \vec{r}\,'\rho^*\, dV = \vec{p}^{\,*} = \vec{p}\Big(t - \frac{R}{\mathrm{c}}\Big)$$

Do đó (5.16) trở thành

$$\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{\vec{p}^{\,*}}{R} \tag{5.17}$$

5.2.3 Thế véctơ của lưỡng cực bức xạ

Theo (5.12) ta có

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)}{r}\, dV$$

khai triển hàm dưới dấu tích phân theo chuỗi Taylor

$$\frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)}{r} = \frac{\vec{j}^{\,*}}{R} - (\vec{r}\,'\nabla)\frac{\vec{j}^{\,*}}{R} + \cdots$$

trong đó $\vec{j}^{\,*} = \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)$. khi lấy tích phân số hạng thứ nhất ta có $\frac{1}{R}\int_V \vec{j}^{\,*}\, dV \neq 0$ vì thế ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai và khi đó

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{j}^{\,*}\, dV$$

Biến đổi tích phân ở vế phải. Lấy đạo hàm theo thời gian $\vec{p}^* = \int \vec{r}\,'\rho^*\,dV$ ta có

$$\frac{\partial \vec{p}^*}{\partial t} = \int_V \vec{r}\,'\frac{\partial \rho^*}{\partial t}\,dV$$

Từ phương trình liên tục $\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j}^{\,*}$ do đó

$$\frac{\partial \vec{p}^*}{\partial t} = -\int_V \vec{r}\,'\mathrm{div}\vec{j}^{\,*}\,dV$$

Nhân hai vế của phương trình trên với véctơ không đổi bất kỳ $\vec{a}^{\,0}$ ta có

$$\vec{a}^{\,0}\frac{\partial \vec{p}^*}{\partial t} = -\int_V \left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\mathrm{div}\vec{j}^{\,*}\,dV$$

Ta có $-\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\mathrm{div}\vec{j}^{\,*} = \vec{j}^{\,*}\mathrm{grad}\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right) - \mathrm{div}\{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\}$, trong đó đạo hàm lấy theo $\vec{r}\,'$ nên $-\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\mathrm{div}\vec{j}^{\,*} = \vec{a}^{\,0}\vec{j}^{\,*} - \mathrm{div}\{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\}$ do đó

$$\vec{a}^{\,0}\frac{\partial \vec{p}^*}{\partial t} = \vec{a}^{\,0}\int_V \vec{j}^{\,*}\,dV - \int_V \mathrm{div}\{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\}\,dV = \vec{a}^{\,0}\int_V \vec{j}^{\,*}\,dV - \oint_S \{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\}\,d\vec{S}$$

Vì không có dòng điện chảy qua mặt kín S bao quanh thể tích V nên tích phân thứ hai bằng không nên $\vec{a}^{\,0}\frac{\partial \vec{p}^*}{\partial t} = \vec{a}^{\,0}\int_V \vec{j}^{\,*}\,dV$ hay

$$\int_V \vec{j}^{\,*}\,dV = \frac{\partial \vec{p}^*}{\partial t}$$

Do đó

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi R}\frac{\partial \vec{p}^*}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\dot{\vec{p}}^* \tag{5.18}$$

5.2.4 Điện từ trường của dao động tử tuyến tính

Lưỡng cực bức xạ đơn giản nhất là dao động tử Hertz, nó gồm hai hòn bi nhỏ bằng kim loại nối với nhau bằng một dây dẫn. Khi truyền cho hai hòn bi đó hai điện tích bằng nhau và ngược dấu, rồi dùng dây dẫn nối chúng lại, sẽ diễn ra một quá trình dao động điện. Điện tích trên mỗi hòn bi sẽ giảm dần đến không và đổi dấu, tăng dần đến cực đại, rồi lại giảm dần đến không và đổi dấu v.v..., trong dây dẫn có một dòng điện biến thiên tuần hoàn. Nếu điểm quan sát ở xa dao động tử, điện từ trường của dao động tử có thể được coi như điện từ trường của một lưỡng cực có mômen lưỡng cực biến thiên tuần hoàn.

Dao động tử tuyến tính là một dao động tử mà mômen lưỡng cực có phương cố định. Mômen lưỡng cực đó biến thiên theo quy luật

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 f(t) \tag{5.19}$$

trong đó $\vec{p}_0$ là một vectơ không đổi, $f(t)$ là một hàm vô hướng tuần hoàn. Chú ý rằng trong những biểu thức của thế vô hướng (5.17) và thế vectơ (5.18) ta phải tính toán với $\vec{p}^* = \vec{p}_0 f^*$, với $f^* = f(t') = f(t - \frac{R}{c})$. Khi lấy đạo hàm theo thời gian ta có

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t'} \tag{5.20}$$

Lấy đạo hàm theo toạ độ ta có $\nabla f^* = \frac{\partial f^*}{\partial t}\nabla t'$, do $\nabla t' = \frac{1}{c}\nabla R = -\frac{\vec{n}}{c}$, trong đó $\vec{n}$ là vectơ đơn vị theo phương của $\vec{R}$ nên:

$$\nabla f^* = -\frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial f^*}{\partial t'} = -\frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial f^*}{\partial t} = -\frac{\vec{n}}{c}\dot{f}^* \tag{5.21}$$

Sau đây ta sẽ tính điện từ trường ở miền cách xa giao động tử, ứng với $R \gg r'$. Trong đó ta chỉ cần giữ những số hạng chứa $\frac{1}{R}$, bỏ qua những số hạng chứa $\frac{1}{R^2}$ trở lên, vì $\frac{1}{R^2} \ll \frac{1}{R}$. Áp dụng (5.18) để tính từ trường

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{rot}\frac{\dot{\vec{p}}^*}{R}$$

Ta có rot $\frac{\dot{\vec{p}}^*}{R} = \left[\nabla \times \frac{\dot{\vec{p}}^*}{R}\right] = \left[\left(\nabla\frac{1}{R}\right) \times \dot{\vec{p}}^*\right] + \frac{1}{R}[\nabla \times \dot{\vec{p}}^*]$, bỏ qua số hạng chứa $\left(\nabla\frac{1}{R}\right)$ còn

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\frac{\dot{\vec{p}}^*}{R} &= \frac{1}{R}\left[\nabla \times \dot{\vec{p}}^*\right] = \frac{1}{R}\left[\nabla \times \left(\vec{p}_0\dot{f}^*\right)\right] = \frac{1}{R}\left[\left(\nabla\dot{f}^*\right) \times \vec{p}_0\right] \\ &= -\frac{1}{Rc}\left[\left(\vec{n}\ddot{f}^*\right) \times \vec{p}_0\right] = \frac{1}{Rc}\left[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\right]\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi Rc}[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\,] \tag{5.22}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi Rc}[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\,] \tag{5.23}$$

Áp dụng (5.17) và (5.18) để tính điện trường

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\nabla\frac{\vec{p}^*}{R}\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\vec{p}}^*}{R}$$

Ta có $\nabla\,\frac{\vec{p}^*}{R} = \vec{p}^*\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\nabla\vec{p}^*$, bỏ qua số hạng chứa $\nabla\frac{1}{R}$

$$\nabla\frac{\vec{p}^*}{R} = \frac{1}{R}\nabla\vec{p}^* = \frac{\vec{p}_0}{R}\nabla f^* = \frac{\vec{p}_0}{R}\left(\frac{-\vec{n}\dot{f}^*}{c}\right) = -\frac{\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*}{Rc}$$

Do đó

$$\nabla\left(\nabla\frac{\vec{p}^*}{R}\right) = -\nabla\left(\frac{\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*}{Rc}\right) = \frac{\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*}{R}\nabla\frac{1}{R} - \frac{1}{Rc}\nabla(\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*\,)$$

bỏ qua số hạng chứa $\nabla\frac{1}{R}$

$$\nabla\left(\nabla\frac{\vec{p}^*}{R}\right) = -\frac{1}{Rc}\nabla(\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*\,) = -\frac{\vec{n}\,\vec{p}_0}{Rc}\nabla\dot{f}^* = -\frac{\vec{n}\,\vec{p}_0}{Rc}\left(-\frac{\vec{n}\,\ddot{f}^*}{c}\right) = \frac{\vec{n}\,(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*)}{Rc^2}$$

Do $\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$ nên

$$\vec{E} = \frac{\vec{n}\,(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*)}{4\pi\varepsilon_0 Rc^2} - \ddot{\vec{p}}^*\frac{\mu_0}{4\pi R} = \frac{\mu_0}{4\pi R}[\vec{n}\,(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*) - \ddot{\vec{p}}^*]$$

để ý $\quad [\vec{n}(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*) - \ddot{\vec{p}}^*] = \vec{n}(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*) - \ddot{\vec{p}}^*(\vec{n}\vec{n}\,) = [\,[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}] \times \vec{n}\,]$ nên

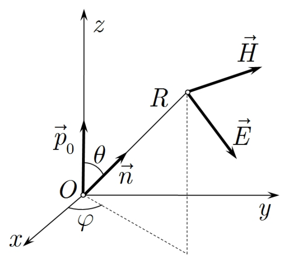
$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\left[[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\,] \times \vec{n}\right] \tag{5.24}$$

5.2.5 Tính chất điện từ trường của dao động tử tuyến tính

Theo (5.23) và (5.24) thì tại điểm quan sát P bất kỳ điện trường $\vec{E}(\vec{R},t)$ và từ trường $\vec{H}(\vec{R},t)$ do dao động tử tuyến tính bức xạ ra là một hàm phụ thuộc vào giá trị của $\vec{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$. Như vậy *điện từ trường do dao động tử tuyến tính bức xạ ra là sóng điện từ truyền từ nguồn (dao động tử) đi ra mọi phương của không gian với vận tốc* c.

Nếu xét ở miền xa nguồn, ta thấy rằng trên mặt cầu bán kính R có tâm tại nguồn sóng thì điện từ trường đều phụ thuộc một giá trị của $\vec{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$. Do đó mặt cầu đó là mặt đồng pha hay mặt sóng. *Sóng điện từ do dao động tử tuyến tính bức xạ ra ở miền xa nguồn là sóng cầu.* Miền ở xa dao động tử được gọi là *miền sóng.*

Theo (5.23) và (5.24) thì điện trường $\vec{E}(\vec{R},t)$ và từ trường $\vec{H}(\vec{R},t)$ phụ thuộc vào phương truyền sóng. Đối với mỗi phương truyền $\vec{n}$ điện trường và từ trường tỉ lệ với $\ddot{p}^*\sin\theta$. Khi $\vec{n}$ cùng phương với $\vec{p}_0$ thì $\sin\theta=0$ nên $E=H=0$. Khi $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{p}_0$ thì $\sin\theta=1$, bức xạ là cực đại



Hình 5.3:

$$E=E_{\max}=\frac{\mu_0\ddot{p}^*}{4\pi R};\ \ H=H_{\max}=\frac{\ddot{p}^*}{4\pi Rc}$$

Khi bức xạ theo phương bất kỳ thì $0<\sin\theta<1$, lúc đó

$$E=E_{\max}\sin\theta=\frac{\mu_0\ddot{p}^*}{4\pi R}\sin\theta;\quad H=H_{\max}\sin\theta=\frac{\ddot{p}^*}{4\pi Rc}\sin\theta$$

Theo (5.23) và (5.24) thì $\vec{E}(\vec{R},t)$ và $\vec{H}(\vec{R},t)$ *đều vuông góc với phương truyền* $\vec{n}$ và $\vec{E}=\mu_0 c[\vec{H}\times\vec{n}\,]$ hay

$$\sqrt{\varepsilon_0}\,\vec{E}=\sqrt{\mu_0}\,[\vec{H}\times\vec{n}\,]$$

về độ lớn

$$\sqrt{\varepsilon_0}\,E=\sqrt{\mu_0}\,H$$

Như vậy ở xa nguồn bức xạ sóng điện từ có tính chất của sóng cầu và trong khoảng không gian tương đối nhỏ nó có tính chất của sóng phẳng.

5.2.6 Lưỡng cực bức xạ tuần hoàn

Xét một lưỡng cực bức xạ là một dao động tử tuyến tính dao động theo quy luật

$$\vec{p}=\vec{p}_0\cos\omega t$$

Trong đó ω là tần số dao động của dao động tử[1]. Ta có

$$\ddot{\vec{p}}^*=-\omega^2\vec{p}_0\cos\omega\Big(t-\frac{R}{c}\Big)$$

Do đó tại mỗi điểm của không gian ta có

$$E=\frac{\mu_0\ddot{p}^*}{4\pi R}\sin\theta=\frac{\omega^2\mu_0 p_0}{4\pi R}\sin\theta\cos\omega\Big(t-\frac{R}{c}\Big)$$

[1]Đó là mẫu đơn giản nhất của nguyên tử bức xạ, hay của ăngten trạm phát sóng vô tuyến

$$H = \frac{\mu_0 \ddot{p}^*}{4\pi R\mathrm{c}} \sin\theta = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi R\mathrm{c}} \sin\theta \cos\omega\Big(t - \frac{R}{\mathrm{c}}\Big)$$

Như vậy tần số bức xạ bằng tần số dao động của lưỡng cực, biên độ của điện trường và từ trường tỉ lệ với ω^2 và tỉ lệ nghịch với khoảng cách R từ điểm quan sát tới nguồn. Mật độ năng lượng tỉ lệ với ω^4 và tỉ lệ nghịch với R^2. Tức là sóng điện từ có tần số càng lớn (bước sóng càng nhỏ) thì năng lượng càng lớn và sóng truyền càng xa thì năng lượng của nó càng giảm.

Để ý khi truyền càng xa nguồn diện tích mặt sóng tăng tỉ lệ với R^2 trong khi mật độ năng lượng giảm tỉ lệ với R^2, người ta tính được thông lượng của véctơ mật độ dòng năng lượng qua mỗi mặt sóng là không đổi, tức là năng lượng không bị mất mát đi. Xét trong toàn không gian thì năng lượng sóng điện từ được bảo toàn.

5.3 Trường điện từ tự do

5.3.1 Các phương trình của trường điện từ tự do

Trường điện từ tồn tại độc lập với điện tích và dòng diện gọi là trường điện từ tự do. Trường điện từ tự do nói chung cũng do điện tích và dòng điện sinh ra nhưng sau khi được hình thành chúng tuân theo quy lật riêng và không phụ thuộc vào nguồn gốc sinh ra chúng nữa.

Các phương trình của trường điện từ tự do (không có điện tích và dòng điện)

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.25}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.26}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = 0 \tag{5.27}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{5.28}$$

Đối với trường điện từ tự do điện trường và từ trường không tách rời nhau. Chúng đều là các trường xoáy và biến thiên theo thời gian.

Lấy rota hai vế (5.25) ta có $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\,\mathrm{rot}\vec{H}}{\partial t} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, mặt khác $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$ do đó

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.29}$$

Tương tự đối với $\vec{H}$

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.30}$$

Điện trường và từ trường thoả mãn một phương trình như nhau đó là phương trình sóng không có vế phải (phương trình d' Alembert). *Trường điện từ tự do tồn tại dưới dạng sóng điện từ*, không có trường điện từ tự do tĩnh.

5.3.2 Sóng điện từ phẳng

Xét trường hợp đơn giản của trường điện từ tự do mà các thành phần điện trường và từ trường chỉ là hàm của một toạ độ x. phương trình (5.29) và (5.30) viết dạng

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{5.31}$$

Trong đó ψ là véctơ $\vec{E}$ hoặc $\vec{H}$. Nghiệm của (5.31) có dạng

$$\psi = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \tag{5.32}$$

Trong đó f_1, f_2 là hai hàm bất kì của t và x, còn $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Xét ý nghĩa của nghiệm riêng thứ nhất $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Trong mặt phẳng $x = x_1$ trường biến thiên theo thời gian. Tại cùng một thời điểm t_1 trường tại mọi điểm trên mặt phẳng đó đều có giá trị như nhau và bằng $f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right) = \text{const}$. Do đó mặt phẳng $x = x_1$ vuông góc với trục Ox là mặt đồng pha hay mặt sóng. Sóng điện từ ở đây là sóng điện từ phẳng

Giả sử tại mặt phẳng $x = x_2 > x_1$ vào thời điểm t_2 trường cũng có giá trị như tại mặt $x = x_1$ vào thười điểm t_1, ta phải có

$$t_2 - \frac{x_2}{v} = t_1 - \frac{x_1}{v} \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} > t_1;\;\; (x_2 - x_1) = v\,(t_2 - t_1)$$

Như vậy pha của sóng đã truyền theo chiều dương trục Ox với vận tốc $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Tương tự nghiệm riêng thứ hai $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$ biểu diễn sóng điện từ phẳng truyền theo chiều âm trục Ox với vận tốc $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

5.4 Sóng điện từ phẳng đơn sắc

Nếu trường điện từ là một sóng phẳng đơn sắc truyền theo chiều dương trục Ox và biến thiên tuần hoàn với tần số góc $\omega = \frac{2\pi}{T}$ thì nghiệm của phương trình sóng phẳng phải kết hợp tính chất sóng phẳng với tính chất của dao động điều hòa

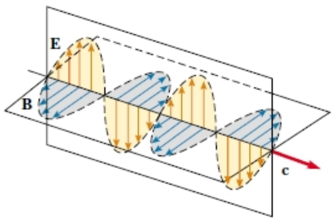
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right] \tag{5.33}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right] \tag{5.34}$$

Trong đó $\vec{E}_0$ và $\vec{H}_0$ là biên độ, sóng điện từ như vậy gọi là sóng điện từ phẳng đơn sắc. Đặt

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{5.35}$$

gọi là số sóng. (5.33) và (5.34) viết lại dưới dạng phức



Hình 5.4:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{i(\omega t - kx + \alpha)\} \tag{5.36}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp\{i(\omega t - kx + \alpha)\} \tag{5.37}$$

Nếu phương truyền sóng không trùng với trục tọa độ nào thì định nghĩa véctơ sóng

$$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n} \tag{5.38}$$

trong đó $\vec{n}$ là véctơ đơn vị theo phương truyền sóng. Gọi $\vec{r}$ là bán kính véctơ của điểm quan sát, ta có $\vec{k}\,\vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z$, phương trình sóng phẳng có dạng

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r} + \alpha)\} \tag{5.39}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r} + \alpha)\} \tag{5.40}$$

Thay (5.39) và (5.40) vào (5.25) – (5.28) và để ý div$\vec{E} = -i(\vec{k}\vec{E}\,)$; rot$\vec{E} = -i[\,\vec{k} \times \vec{E}\,]$; $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}$ ta có

$$[\,\vec{k} \times \vec{E}\,] = \omega\mu\vec{H} \tag{5.41}$$

$$[\,\vec{k} \times \vec{H}\,] = -\omega\varepsilon\vec{E} \tag{5.42}$$

$$\vec{k}\vec{E} = 0 \tag{5.43}$$

$$\vec{k}\vec{H} = 0 \tag{5.44}$$

Theo (5.43) và (5.44) các véctơ $\vec{E}$ và $\vec{H}$ đều vuông góc với véctơ $\vec{k}$, tức là vuông góc với phương truyền sóng. *Sóng điện từ phẳng đơn sắc là sóng ngang.*

Theo (5.41) và (5.42) các véctơ $\vec{k}$, $\vec{E}$ và $\vec{H}$ theo thứ tự lập thành tam diện thuận. Ta có $\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{n}$ do đó (5.41) trở thành

$$\sqrt{\varepsilon}\,[\vec{n} \times \vec{E}\,] = \sqrt{\mu}\,\vec{H} \tag{5.45}$$

hay về độ lớn

$$\sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H \tag{5.46}$$

Véctơ mật độ dòng năng lượng $\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}\,]$ cùng phương chiều với phương truyền sóng. Về độ lớn

$$P = EH = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,H^2 = \frac{\mu H^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} = vw$$

$$\vec{P} = w\,\vec{v} \tag{5.47}$$

Năng lượng truyền đi với vận tốc bằng vận tốc pha của sóng. Sóng truyền tới đau năng lượng truyền tới đó. Và đối với *sóng điện từ phẳng đơn sắc truyền trong điện môi năng lượng không bị hấp thụ.*

Sóng điện từ phẳng đơn sắc là khái niện đã lý tưởng hoá, trong thực tế không có sóng hoàn toàn phẳng và đơn sắc nhưng có thể coi gần đúng là sóng phẳng đơn sắc trong những điều kiện nhất định. Ta có thể phân tích các sóng đó thành các sóng phẳng đơn sắc nhờ sử dụng chuỗi Fourier, sự phân tích này phụ thuộc tính chất của hàm sóng.

Có loại sóng được phân tích theo chuỗi Fourier, trong đó chứa các tần số là bội số của một tần số cơ bản $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, với T là chu kì của sóng. Khi đó

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-in\omega_0 t}$$

Tong đó f là hàm sóng và biên độ f_n của mỗi dao động được xác định bởi

$$f_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{in\omega_0 t}dt$$

Có loại sóng được phân tích theo chuỗi Fourier, trong đó chứa tập hợp các tần số liên tục thì

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega$$

Các thành phần Fourier được xác định bởi

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}dt$$

Trong trường hợp chung các véctơ $\vec{E}$ và $\vec{H}$ không giữ một phương cố định nào, tuy nhiên tại mỗi thời điểm nhất định chúng vẫn vuông góc với nhau và vuông góc với phương truyền sóng. Sóng như vậy gọi là *sóng không phân cực*. Nếu các véctơ $\vec{E}$ và $\vec{H}$ luôn giữ một phương không đổi, ví dụ $\vec{E}$ luôn song song với một véctơ đơn vị cố định $\vec{e}$ gọi là véctơ phân cực, thì sóng được gọi là *sóng phân cực phẳng*[2].

5.5 Sóng điện từ trong chất dẫn điện

Xét sóng điện từ phẳng đơn sắc cho bởi (5.39) và (5.40) truyền trong vật dẫn đồng chất và vô tận. Trong vật dẫn ε, μ, λ là các hằng số khác không, do đó có dòng điện dẫn tuân theo định luật Ohm $\vec{j} = \lambda\vec{E}$. Khi đó

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \Leftrightarrow [\,\vec{k}\times\vec{E}\,] = \omega\mu\vec{H}$$
$$\mathrm{rot}\vec{H} = j + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \lambda\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow [\vec{k}\times\vec{H}\,] = -\omega\Big(\varepsilon - i\frac{\lambda}{\omega}\Big)\vec{E}$$

Đặt

$$\varepsilon^* = \varepsilon - i\frac{\lambda}{\omega} \tag{5.48}$$

gọi là hằng số điện môi phức, và định nghĩa số sóng phức

$$k^* = \omega\sqrt{\varepsilon^*\mu} \tag{5.49}$$

Ta có $(k^*)^2 = \omega^2\varepsilon^*\mu = \omega^2\varepsilon\mu - i\omega\lambda\mu$, và viết k^* dưới dạng $k^* = k - is$ với k và s là những số thực. $(k^*)^2 = k^2 - s^2 - 2iks$, cân bằng phần thực và phần ảo tìm được

$$k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\Big(1 + \sqrt{1 + \Big(\frac{\lambda}{\omega\varepsilon}\Big)^2}\,\Big)\ ; \quad s^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\Big((-1 + \sqrt{1 + \Big(\frac{\lambda}{\omega\varepsilon}\Big)^2}\,\Big)$$

[2]còn gọi là phân cực thẳng

Đối với kim loại $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\lambda = 10^7(\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1})$, nếu xét sóng ánh sáng có $\omega \simeq 3.10^{15}\mathrm{s}^{-1}$ thì $\left(\frac{\lambda}{\omega\varepsilon}\right)^2 \approx 40000 \gg 1$, còn đối với các sóng điện từ có tần số thấp hơn (sóng vô tuyến điện) thì $\left(\frac{\lambda}{\omega\varepsilon}\right)^2$ càng lớn hơn 1 nên ta có

$$k \approx s \approx \sqrt{\frac{\omega\lambda\mu}{2}} \tag{5.50}$$

Thay số sóng phức k^* vào phương trình sóng phẳng đơn sắc (5.36) ta có

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-sx} \mathrm{e}^{i(\omega t - kx + \alpha)} \tag{5.51}$$

Như vậy khi sóng điện từ truyền trong vật dẫn thì biên độ của nó ($\vec{E}_0\mathrm{e}^{-sx}$) giảm dần theo quy luật hàm mũ. Tốc độ giảm của biên độ sóng điện từ xác định bằng độ xuyên thấu của sóng

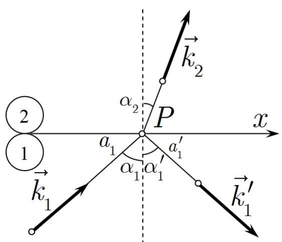
$$d = \frac{1}{s} = \sqrt{\frac{2}{\omega\lambda\mu}} \tag{5.52}$$

Khi sóng điện từ truyền qua một khoảng cách d thì biên độ của nó giảm đi e lần, nghĩa là cường độ của nó giảm e^2 lần. Theo (5.52) thì tần số sóng điện từ càng nhỏ (bước sóng càng ngắn) thì sóng bị hấp thụ càng nhanh. Năng lượng sóng bị hấp thụ dùng để sinh ra dòng điện dẫn trong vật dẫn và toả nhiệt Joule – Lentz

5.6 Sự phản xạ và khúc xạ sóng điện từ

5.6.1 Điều kiện biên đối với các véctơ sóng

Giả sử có hai môi trường 1 và 2 giới hạn bằng mặt phân cách là mặt phẳng và có sóng điện từ phẳng đơn sắc truyền từ môi trường 1 tới điểm P trên mặt phân cách sang môi trường 2. Ta gọi nó là sóng tới và biểu diễn bằng véctơ sóng $\vec{k}_1$. Tới điểm P một phần sóng phản xạ lại môi trường 1 gọi là sóng phản xạ và biểu diễn bằng véctơ sóng $\vec{k}'_1$, một phần truyền sang môi trường 2 gọi là sóng khúc xạ và biểu diễn bằng véctơ sóng $\vec{k}_2$.



Hình 5.5:

Gọi $\vec{r}$ là bán kính véctơ của điểm P (gốc toạ độ O chọn bất kỳ) ta có phương trình của các sóng

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \mathrm{e}^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})} \tag{5.53}$$

$$\vec{E}'_1 = \vec{E}'_{01} \mathrm{e}^{i(\omega'_1 t - \vec{k}'_1 \vec{r})} \tag{5.54}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \mathrm{e}^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})} \tag{5.55}$$

Trong đó $\vec{E}_{01}$; $\vec{E}'_{01}$; $\vec{E}_{02}$ là biên độ của các sóng, ω_1, ω'_1, ω_2 là tần số của các sóng. Điều kiện biên đối với các thành phần tiếp tuyến của véctơ $\vec{E}$ được viết

$$E'_{1t} + E_{1t} = E_{2t} \tag{5.56}$$

5.6.2 Các định luật phản xạ và khúc xạ sóng điện từ

Chọn mặt giới hạn làm mặt Oxy ta viết được điều kiện biên (5.56) bằng cách chiếu (5.53), (5.54) và (5.55) xuống mặt phẳng Oxy

$$E_{01t}e^{i(\omega_1 t - xk_1\cos a_1 - yk_1\cos b_1)} + E'_{01t}e^{i(\omega'_1 t - xk'_1\cos a'_1 - yk'_1\cos b'_1)} = E_{02t}e^{i(\omega_2 t - xk_2\cos a_2 - yk_2\cos b_2)} \tag{5.57}$$

Trong đó $\cos a_1,\ \cos b_1,\ \cos a'_1,\ \cos b'_1,\ \cos a_2,\ \cos b_2$ là các cosin chỉ phương của các véctơ sóng.

Điều kiện biên (5.56) không phụ thuộc thời gian và toạ độ điểm quan sát. Muốn cho điều kiện biên (5.57) được nghiệm đúng với mọi giá trị của t, x và y thì các đối số của hàm mũ phải luôn bằng nhau đối với mọi giá trị của t, x và y. Do đó các hệ số tương ứng của t, x và y phải bằng nhau

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 = \omega \tag{5.58}$$

$$k_1\cos a_1 = k'_1\cos a'_1 = k_2\cos a_2 \tag{5.59}$$

$$k_1\cos b_1 = k'_1\cos b'_1 = k_2\cos b_2 \tag{5.60}$$

Theo (5.58) thì *tần số sóng điện từ không đổi khi nó phản xạ và khúc xạ*, ta gọi chung tần số đó là ω.

Do $k = \dfrac{\omega}{v}$ ta viết được (5.59) và (5.60) thành

$$\frac{\omega}{v_1}\cos a_1 = \frac{\omega}{v_1}\cos a'_1 = \frac{\omega}{v_2}\cos a_2 \tag{5.61}$$

$$\frac{\omega}{v_1}\cos b_1 = \frac{\omega}{v_1}\cos b'_1 = \frac{\omega}{v_2}\cos b_2 \tag{5.62}$$

Từ (5.61) và (5.62) ta thấy đối với sóng phản xạ $a_1 = a'_1$, $b_1 = b'_1$. Nếu chọn mặt Oxz chứa véctơ $\vec{k}_1$ ta có $\cos b_1 = 0$. Theo (5.62) ta cũng có $\cos b'_1 = 0$ và $\cos b_2 = 0$, tức là các véctơ $\vec{k}'_1$ và $\vec{k}_2$ cũng nằm trong mặt phẳng Oxz. Như vậy *sóng tới, sóng phản xạ và sóng khúc xạ cùng nằm trong một mặt phẳng*. Theo hình 5.5 thì $a_1 = a'_1$ tương đương với

$$\alpha_1 = \alpha'_1 \tag{5.63}$$

α_1 gọi là góc tới và α'_1 gọi là góc phản xạ. Như vậy *góc tới bằng góc phản xạ*.

Theo (5.61) ta cũng rút ra đối với sóng tới và sóng khúc xạ

$$\frac{\omega}{v_1}\sin\alpha_1 = \frac{\omega}{v_2}\sin\alpha_2 \quad \text{hay} \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}$$

Đối với các điện môi thông thường thì $\mu = \mu_0$ nên

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{12} \tag{5.64}$$

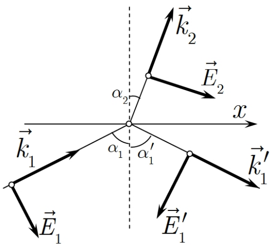
trong đó α_2 gọi là góc khúc xạ và $n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$ là chiết suất tỉ đối của môi trường 2 đối với môi trường 1, n_1 và n_2 là chiết suất thuyệt đối của môi trường 1 và môi trường 2. Vậy *tỉ số giữa sin góc tới và sin góc khúc xạ bằng chiết suất tỉ đối của môi trường 2 đối với môi trường 1.*

5.6.3 Hệ số phản xạ và khúc xạ

Khảo sát sự phản xạ của sóng điện từ tại mặt giới hạn. Theo (5.45) giữa các véctơ biên độ điện trường $\vec{E}_0$ và các véctơ biên độ từ trường $\vec{H}_0$ có

$$\sqrt{\varepsilon}[\vec{n} \times \vec{E}_0] = \sqrt{\mu}\vec{H}_0 \tag{5.65}$$

Người ta thường gọi véctơ điện trường là véctơ ánh sáng. Ta sẽ khảo sát hai trường hợp riêng của các tia sáng phân cực phẳng sau.



Hình 5.6:

Trường hợp 1: *Véctơ ánh sáng sóng tới nằm trong mặt phẳng tới*

Giả sử các véctơ $\vec{k}_1$ và $\vec{E}_{01}$ có phương chiều như Hình 5.6, véctơ $\vec{H}_{01}$ hướng theo chiều dương trục Oy (vuông góc với mặt phẳng hình vẽ và hướng vào trong). Do véctơ từ trường luôn song song với mặt giới hạn do đó khi phản xạ và khúc xạ véctơ biên độ $\vec{H}_0$ không đổi phương chiều, nên các véctơ $\vec{H}'_{01}$ và $\vec{H}_{02}$ cũng hướng theo chiều dương trục Oy. Do tính chất của sóng phẳng đơn sắc $\vec{k}$, $\vec{E}_0$, và $\vec{H}_0$ phải tạo thành tam diện thuận nên $\vec{E}'_{01}$, $\vec{E}_{02}$ phải có phương chiều như Hình 5.6.

Điều kiện biên cho véctơ điện trường

$$\begin{aligned} E'_{01x} + E_{01x} &= E_{02x} \\ E_{01}\cos\alpha_1 - E'_{01}\cos\alpha'_1 &= E_{02}\cos\alpha_2 \\ (E_{01} - E'_{01})\cos\alpha_1 &= E_{02}\cos\alpha_2 \end{aligned} \tag{5.66}$$

Điều kiện biên cho véctơ từ trường

$$H'_{01y} + H_{01y} = H_{02y}$$

Đối với các điện môi thông thường thì $\mu = \mu_0$ nên

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,(E'_{01} + E_{01}) = \sqrt{\varepsilon_2}\,E_{02} \tag{5.67}$$

Từ (5.66) và (5.67) và sử dụng (5.64) rút ra

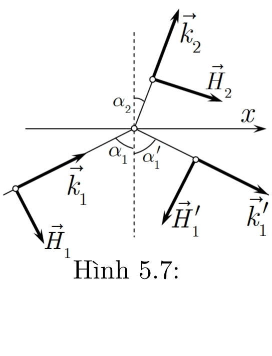
$$E'_{01} = E_{01}\frac{\mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\mathrm{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{5.68}$$

Trường hợp 2: *Véctơ ánh sáng sóng tới vuông góc với mặt phẳng tới*

Giả sử véctơ $\vec{H}_{01}$ có phương chiều như Hình 5.7, véctơ $\vec{E}_{01}$ hướng theo chiều âm trục Oy (vuông góc với mặt phẳng hình vẽ và hướng từ trong ra ngoài). Do véctơ điện trường luôn song song với mặt giới hạn do đó khi phản xạ và khúc xạ véctơ biên độ $\vec{E}_0$ không đổi phương chiều, nên các véctơ $\vec{E}'_{01}$ và $\vec{E}_{02}$ cũng hướng theo chiều âm trục Oy. Do đó $\vec{H}'_{01}$, $\vec{H}_{02}$ phải có phương chiều như Hình 5.7.

Điều kiện biên cho véctơ điện trường

$$E'_{01} + E_{01} = E_{02} \tag{5.69}$$



Hình 5.7:

Điều kiện biên cho véctơ từ trường

$$\begin{gathered} H'_{01x} + H_{01x} = H_{02x} \\ \sqrt{\varepsilon_1}\,(E_{01} - E'_{01})\cos\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\,E_{02}\cos\alpha_2 \\ (E_{01} - E'_{01})\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 = \sqrt{\varepsilon_2}\,E_{02}\cos\alpha_2 \sin\alpha_1 \end{gathered} \tag{5.70}$$

Từ (5.69) và (5.70) rút ra

$$E'_{01} = -E_{01}\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{5.71}$$

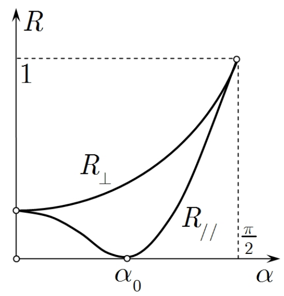
Vì cường độ ánh sáng tỉ lệ với bình phương biên độ dao động, nên đặc trưng cho sự phản xạ bằng hệ số phản xạ

$$R = \frac{(E'_{01})^2}{E_{01}^2} \tag{5.72}$$

Đối với trường hợp 1 ta có

$$R_{//} = \frac{\mathrm{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\mathrm{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \leq 1 \tag{5.73}$$

Đối với trường hợp 2 ta có



Hình 5.8:

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{5.74}$$

(5.73) và (5.74) là các công thức Frexnel về phản xạ ánh sáng.

Ta có

$$\lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}} \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \alpha_2\to 0}} \frac{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} - \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}}{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} + \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}} = \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}$$

Do đó khi $\alpha_1 = 0$ thì $R_\perp = R_{//} = \left(\frac{n_{12}-1}{n_{12}+1}\right)^2 = R_0$. Khi $\alpha_1 = \pi/2$ thì $R_\perp = R_{//} = 1$. Khi α tăng dần từ $0 \longrightarrow \pi/2$ thì $R_\perp$ tăng dần từ R_0 đến 1, còn $R_{//}$ giảm từ R_0 tới cực tiểu bằng 0 (khi $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$) rồi tăng đến 1. Khi $R_{//}$ đạt cực tiểu thì $\alpha = \alpha_0$ ứng với $\mathrm{tg}\alpha_0 = n_{12}$, góc α_0 gọi là góc Brewster hay góc phân cực hoàn toàn. Như vậy trong trường hợp véctơ ánh sáng nằm trong mặt phẳng tới, khi góc tới bằng góc Brewster thì toàn bộ ánh sáng truyền sang môi trường 2, trong môi trường 1 không có ánh sáng phản xạ.

Trong trờng hợp chung phương của véctơ ánh sáng là bất kỳ (ánh sáng không phân cực) phân tích véctơ ánh sáng thành hai thành phần, một nằn trong mặt phẳng tới ($E_{0//}$) và một vuông góc với mặt phẳng tới ($E_{0\perp}$). Độ phân cực của ánh sáng phản xạ được định nghĩa

$$\mathcal{P} = \frac{(E'_{0\perp})^2 - (E'_{0//})^2}{(E'_{0\perp})^2 + (E'_{0//})^2} = \frac{R_\perp - R_{//}}{R_\perp + R_{//}} \tag{5.75}$$

Khi $\alpha_1 = 0$ thì $R_\perp = R_{//} = R_0$ nên $\mathcal{P} = 0$, nghĩa là ánh sáng phản xạ không bị phân cực.

Khi $\alpha_1 = \alpha_0$ thì $R_{//} = 0$ và $\mathcal{P} = 1$ khi đó ánh sáng phản xạ bị phân cực hoàn toàn.

Khi $\alpha_1 = \pi/2$ thì $R_{\perp} = R_{//}$ nên $\mathcal{P} = 0$, ánh sáng phản xạ không bị phân cực.

Chương 6

Tương tác giữa điện tích và điện từ trường

6.1 Các phương trình cơ bản của thuyết electron

6.1.1 Đặc điểm của điện động lực học vĩ mô và vi mô

Điện động lực vĩ mô là lý thuyết về trường điện từ trong đó người ta giả thiết điện tích và môi trường là liên tục. nó mang lại nhiều kết quả đúng và quan trọng. Tuy nhiên để giải thích một số hiện tượng, ví dụ sự tán sắc của ánh sáng, phải xét đến cấu trúc nguyên tử của điện tích và môi trường. Lý thuyết về trường điện từ có xét đến tính gián đoạn của điện tích và môi trường được gọi là điện động lực học vi mô hay thuyết electron.

Thực nghiệm cho thấy electron có điện tích âm nhỏ nhất, còn proton có điện tích dương nhỏ nhất. Chúng khác dấu nhưng cùng có giá trị e = $1{,}6.10^{-19}$C. trong nhiều trường hợp ta có thể xem electron và proton là điện tích điểm. Thực tế không có điện tích phân bố liên tục trong không gian, mỗi điện tích đều là tập hợp gián đoạn các điện tích điểm. Vì điện tích của electron rất nhỏ nên trong nhiều trường hợp ta có thể coi các điện tích là liên tục. Ngoài ra môi trường cũng không liên tục mà là gián đoạn vì được tạo nên từ các nguyên tử, phân tử. Thuyết electron do Lorentz sáng lập[1] đóng vai trò quan trọng trong việc giải thích các tính chất điện từ của môi trường.

6.1.2 Các phương trình cơ bản của thuyết electron

Điện động lực vi mô coi môi trường vật chất là tập hợp các điện tích đặt trong chân không. Trường điện từ trong môi trường vật chất là trường điện từ trong chân không nhưng đã bị trường của cá hạt tích điện đó là biến đổi. Như vậy tính chất của môi trường là do sự phân bố các điện tích tạo nên môi trường quyết định, còn ảnh hưởng của môi trường lên trường điện từ chính là ảnh hưởng của các điện tích này thông qua sự tương tác của chúng với trường điện từ đã cho. Theo điện động lực học vi mô mọi hiện tượng điện từ đều có thể giải thích bằng sự tương tác của các điện tích trong chân không. Do đó ta

[1] Thuyết electron do Lorentz sáng lập năm 1895 và được công bố trong công trình "*Lý thuyết về tính chất điện và tính chất quang của vật chuyển động*"

chỉ cần dựa cà các tham số đặc trưng cho chân không là ε_0 và μ_0 bên cạnh các véctơ đạc trưng cho trường điện từ. Do electron trong nguyên tử chuyển đông rất nhanh nên các đại lượng điện từ trong điện động lực học vi mô cũng biến thiên rất nhanh theo toạ độ và thời gian. Vì vậy để phân biệt chúng với các đại lượng điện từ trong điện động lực học vĩ mô ta ký hiệu chúng bằng các chữ có dấu phẩy $\vec{E}'$, $\vec{D}'$, $\vec{B}'$, $\vec{H}'$, giữa chúng có mối liên hệ

$$\vec{D}' = \varepsilon_0 \vec{E}', \ \vec{B}' = \mu_0 \vec{H}' \tag{6.1}$$

Nếu gọi mật độ điện tích là ρ' và vận tốc của nó là $\vec{v}$ thì véctơ mật độ dòng điện là

$$\vec{j}\,' = \rho' \vec{v} \tag{6.2}$$

(6.2) đúng cho cả điện tích phân bố liên tục và gián đoạn. Đối với điện tích điểm $\rho' = e\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$.

Các đại lượng $\vec{E}'$, $\vec{D}'$, $\vec{B}'$, $\vec{H}'$ trong điện động lực học vĩ mô biến thiên chậm, chúng là các đại lượng được lấy trung bình và mô tả các tá dụng trung bình của điện tích vi mô và dòng điện vi mô trong môi trường vật chất.

Các phương trình cơ bản của điện động lực học vi mô tương tự như các phương trình Maxwell và được gọi là *hệ các phương trình Maxwell – Lorentz*

$$\mathrm{rot}\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \tag{6.3}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}' = \vec{j}\,' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} \tag{6.4}$$

$$\mathrm{div}\vec{D}' = \rho' \tag{6.5}$$

$$\mathrm{div}\vec{B}' = 0 \tag{6.6}$$

Phương trình liên tục

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}\,' = 0 \tag{6.7}$$

Mật độ lực Lorentz

$$\vec{f}\,' = \rho' \left(\vec{E}' + [\vec{v} \times \vec{B}'\,] \right) \tag{6.8}$$

Mật độ năng lượng của trường điện từ

$$w' = \frac{1}{2} \left(\vec{E}'\vec{D}' + \vec{B}'\vec{H}' \right) \tag{6.9}$$

Mật độ dòng năng lượng

$$\vec{P}' = [\vec{E}' \times \vec{H}'\,] \tag{6.10}$$

Các phương trình (6.3) – (6.6) có nội dung vật lý giống như các phương trình của điện động lực học vĩ mô trong chân không. Tuy nhiên ý nghĩa của chúng rộng rãi hơn, cụ thể là

- Các phương trình điện động lực học vĩ mô trong chân không là trường hợp riêng đặc biệt của các phương trình điện động lực học vi mô trong môi trường.
- Các phương trình của điện động lực học vi mô đúng cho cả chân không lẫn môi trường vật chất.

6.2 Mối quan hệ giữa điện động lực học vĩ mô và vi mô

6.2.1 Giá trị trung bình của hàm số

Do các điện tích vi mô chuyển động rất nhanh nên các đại lượng điện từ nói chung là các hàm biến thiên rất nhanh theo tạo độ và thời gian, cho nên không thể đo các giá trị tức thời của chúng mà chỉ đo được giá trị trung bình của chúng. Giá trị trung bình được lấy trong một khoảng thời gian Δt và không gian ΔV đủ nhỏ. Đó chính là các đại lượng điện từ vĩ mô trong các chương trước. Chúng là các hàm liên tục và biến thiên chậm hơn nhiều so với các đại lượng điện từ vi mô.

Theo định nghĩa giá trị trung bình của hàm $f(x, y, z, t)$ xác định theo

$$\langle f(x,y,z,t)\rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t}\int_{\Delta t}\int_{\Delta V} f(x,y,z,t)\, dV dt \tag{6.11}$$

Theo định nghĩa có thể rút ra một số tính chất của phép lấy trung bình

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle f\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial x}\langle f\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle \tag{6.12}$$

$$\int \langle f\rangle\, dt = \left\langle \int f dt\right\rangle, \quad \int \langle f\rangle\, dx = \left\langle \int f dx\right\rangle \tag{6.13}$$

$$\langle f+g\rangle = \langle f\rangle + \langle g\rangle, \quad \langle cf\rangle = c\langle f\rangle \tag{6.14}$$

6.2.2 Phép lấy trung bình điện từ trường

Lấy trung bình các phương trình cơ bản của trường điện từ ta có

$$\mathrm{rot}\langle \vec{E}'\rangle = -\frac{\partial\langle \vec{B}'\rangle}{\partial t} \tag{6.15}$$

$$\mathrm{rot}\langle \vec{H}'\rangle = \langle \vec{j}\,'\rangle + \frac{\partial\langle \vec{D}'\rangle}{\partial t} \tag{6.16}$$

$$\mathrm{div}\langle \vec{D}'\rangle = \langle \rho'\rangle \tag{6.17}$$

$$\mathrm{div}\langle \vec{B}'\rangle = 0 \tag{6.18}$$

$$\langle \vec{D}'\rangle = \varepsilon_0\langle \vec{E}'\rangle \tag{6.19}$$

$$\langle \vec{B}'\rangle = \mu_0\langle \vec{H}'\rangle \tag{6.20}$$

So sánh với hệ đủ các phương trình Maxwell dạng vi phân rút ra

$$\langle \vec{B}'\rangle = \vec{B} \tag{6.21}$$

$$\langle \vec{E}'\rangle = \vec{E} \tag{6.22}$$

Như vậy điện trường vĩ mô là trung bình của điện trường vi mô, cảm ứng từ vĩ mô là trung bình của cảm ứng từ vi mô.

$$\langle \vec{H}'\rangle = \frac{\mu}{\mu_0}\vec{H} \tag{6.23}$$

Như vậy từ trương vĩ mô không phải là giá trị trung bình từ trường vi mô mà tỉ lệ với giá trị đó. Hệ số tỉ lệ phu thuộc tính chất từ của môi trường.

$$\langle \vec{D}' \rangle = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} \tag{6.24}$$

Như vậy cảm ứng điện vĩ mô không phải là giá trị trung bình cảm ứng điện vi mô mà tỉ lệ với giá trị đó. Hệ số tỉ lệ phu thuộc tính chất điện của môi trường.

6.2.3 Phép lấy trung bình mật độ dòng điện

Trong môi trường vật chất có ba loại dòng điện: dòng điện dẫn do chuyển dòng động của các điện tích tự do gây ra, dòng phân tử liên quan với chuyển động của electron trong phân tử và dong liên kết (dong phân cực) do điện tích liên kết gây ra

$$\langle \vec{j}\,' \rangle = \langle \vec{j}\,'_d \rangle + \langle \vec{j}\,'_f \rangle + \langle \vec{j}\,'_l \rangle \tag{6.25}$$

Gọi e_i là điện tích của hại i và $\vec{v}$ là vận tốc của nó, mật độ dòng điện dẫn trung bình

$$\langle j\,'_d \rangle = \sum_i \mathrm{e}_i \vec{v}_i = \vec{j} \tag{6.26}$$

Chuyển động của điện tích trong phân tử gây ra các dòng phân tử. Nếu môi trường không bị từ hoá thì dòng phân tử phân bố hỗn độn và giá trị trung bình của chúng bằng không. Khi môi trường bị từ hoá các dòng phân tử được định hướng, kết quả mật độ dòng phân tử trung bình được xác định theo (3.46)

$$\langle \vec{j}_f \rangle = \mathrm{rot}\, \vec{I}$$

Véctơ phân cực $\vec{P}$ của môi trường là số mômen lưỡng cực trong một đơn vị thể tích $\vec{P} = \sum\limits_k \vec{p}_k$, trong đó $\vec{p}_k = \sum\limits_i (\mathrm{e}_i \vec{r}_i)_k$ là mômen lưỡng cực của phần tử k. Vậy

$$\vec{P} = \sum_k \sum_i (\mathrm{e}_i \vec{r}_i)_k \tag{6.27}$$

Tổng lấy theo tất cả điện tích trong phần tử và tất cả các phần tử trong đơn vị thể tích. Khi đó mật độ dòng liên kết bằng

$$\langle \vec{j}_l \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \sum_{i,k} (\mathrm{e}_i \vec{v}_i)_k \tag{6.28}$$

Như vậy giá trị trung bình của dòng vi mô trong môi trường vật chất có dạng

$$\langle \vec{j}\,' \rangle = \vec{j} + \mathrm{rot}\vec{I} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{6.29}$$

6.2.4 Phép lấy trung bình mật độ điện tích

Trong môi trường vật chất tồn tại điện tích tự do và điện tích liên kết, nên mật độ trung bình là

$$\langle \rho' \rangle = \langle \rho'_t \rangle + \langle \rho'_l \rangle \tag{6.30}$$

ρ'_t là mật độ điện tích vi mô tự do, ρ'_l là mật độ điện tích vi mô liên kết. Giá trị trung bình của mật độ điện tích vi mô tự do chính là mật độ điện tích vĩ mô tự do

$$\langle \rho'_t \rangle = \rho \tag{6.31}$$

Lấy trung bình phương trình liên tục

$$\frac{\partial \langle \rho'_l \rangle}{\partial t} + \mathrm{div} \langle \vec{j}'_l \rangle = 0$$

Kết hợp với (6.29) được

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho'_l \rangle + \mathrm{div} \vec{P}\,) = 0$$
$$\langle \rho'_l \rangle = -\mathrm{div} \vec{P} + f\,(x, y, z)$$

Dựa vào tính chất vật lý của trường điện từ người ta chứng minh được $f(x, y, z) = 0$. do đó

$$\langle \rho'_l \rangle = -\mathrm{div} \vec{P} \tag{6.32}$$

Như vậy giá trị trung bình của mật độ điện tích vi mô

$$\langle \rho' \rangle = \rho - \mathrm{div} \vec{P} \tag{6.33}$$

6.2.5 Mối quan hệ giữa các phương trình Maxwell và các phương trình Maxwell – Lorentz

Dựa vào các phương trình (6.21) – (6.24) có thể viết các phương trình vi mô (6.16) và (6.17) thành

$$\mathrm{rot}\, \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \langle \vec{j}\,' \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_0 \vec{E} \rangle \tag{6.34}$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon_0 \vec{E}\,) = \langle \rho' \rangle \tag{6.35}$$

Thay (6.29) và (6.33) vào các phương trình trên ta có

$$\mathrm{rot}\, \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \mathrm{rot} \vec{I} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_0 \vec{E} \rangle$$
$$\mathrm{div}(\varepsilon_0 \vec{E}\,) = \rho - \mathrm{div} \vec{P}$$

Sử dụng các hệ thức $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},\ \ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{I}$ ta có

$$\mathrm{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{6.36}$$

$$\mathrm{div} \vec{D} = \rho \tag{6.37}$$

Như vậy có thể thu được các phương trình của trường điện từ vĩ mô bằng cách lấy trung bình các phương trình của trường điện từ vi mô.

6.3 Chuyển động của điện tích tự do trong trường điện từ

6.3.1 Phương trình chuyển động của điện tích trong trường điện từ

Nếu điện tích điểm e chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong trường điện từ, lực Lorentz do trường điện từ tác dụng lên điện tích

$$\vec{F} = \mathrm{e}\big(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}\,]\big)$$

Do đó phương trình chuyển động của điện tích[2]

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \mathrm{e}\left(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}\,]\right) \tag{6.38}$$

trong đó m là khối lượng của điện tích.

6.3.2 Chuyển động của điện tích trong trường tĩnh điện

Xét chuyển động của điện tích điểm e trong trường tĩnh điện, phương trình chuyển động của điện tích

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \mathrm{e}\vec{E} = -\mathrm{e}\,\mathrm{grad}\,\varphi \tag{6.39}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\,\vec{v} = -\mathrm{e}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,\frac{d\vec{r}}{dt} = -\mathrm{e}\,\frac{d\varphi}{dt} \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \mathrm{e}\varphi\right) = 0$$

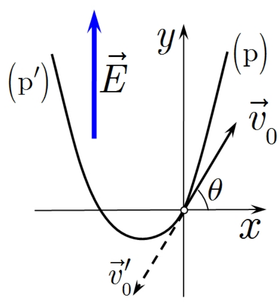
$$\frac{mv^2}{2} + \mathrm{e}\varphi = \mathrm{const} \tag{6.40}$$

(6.40) diễn tả định luật bảo toàn năng lượng đối với chuyển động của hạt. Số hạng thứ nhất là động năng của hạt, số hạng thứ hai là thế năng tương tác giữa hạt với điện trường. Nếu ban đầu hạt đứng yên ($v_0 = 0$) và sau đó nó đi qua được hiệu điện thế $\Delta\varphi = V$ thì[3]

$$\frac{mv^2}{2} = \mathrm{e}V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,|\mathrm{e}|\,V}{m}}$$

Xét điện tích điểm e chuyển động trong điện trường đều $\vec{E}$. Chọn trục Oy theo phương của $\vec{E}$ và giả sử tại $t = 0$ điện tích điểm nằm tại gốc toạ độ O và có vận tốc ban đầu là $\vec{v}_0$ nằm trong mặt phẳng Oxy. Chiếu (6.39) xuống các trục toạ độ

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = \mathrm{e}E$$



Hình 6.1.

[2] chỉ xét tác dụng của trường điện từ, bỏ qua lực hấp dẫn rất nhỏ so với lực Lorentz, vì ta xét các điện tích có khối lượng rất nhỏ như electron, proton...

[3] Đối với electron nếu V = 1vol thì v = 600km/s. Trong vật lý nguyên tử người ta dùng electron – Vol (eV) là đơn vị năng lượng. 1eV là năng lượng của electron đã đi qua hiệu điện thế 1V, 1eV = 1,6.10^{-19}J

Tích phân các phương trình trên ta có phương trình chuyển động

$$x = (v_0 \cos\theta)\; t \tag{6.41}$$

$$y = \frac{eE}{2m}\, t^2 + (v_0 \sin\theta)\, t \tag{6.42}$$

Khử t ta được phương trình quỹ đạo

$$y = \frac{eE}{2m\,(v_0 \cos\theta)^2}\, x^2 + (\text{tg}\theta)\, x \tag{6.43}$$

θ là góc giữa $\vec{v}_0$ và trục Ox. Như vậy quỹ đạo của hạt là đường parabol. Nếu điện tích dương và $\vec{v}_0$ theo chiều[4] của $\vec{E}$ thì quỹ đạo là nhánh (p) của parabol. Nếu $\vec{v}_0$ trái chiều[5] với $\vec{E}$ thì quỹ đạo là nhánh (p') của parabol. Nếu cùng chiều với thì quỹ đạo là đường thẳng và điện tích sẽ chuyển động nhanh dần đều hoặc chậm dần đều.

6.3.3 Chuyển động của điện tích trong từ trường dừng

Phương trình chuyển động của điện tích điểm e trong từ trường

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e[\vec{v} \times \vec{B}\,] \tag{6.44}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v} = e[\vec{v} \times \vec{B}\,]\vec{v} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{mv^2}{2} = \text{const} \tag{6.45}$$

Như vậy tác dụng của từ trường không làm thay đổi động năng của điện tích điểm và do đó không làm thay đổi độ lớn vận tốc của điện tích điểm.

Xét điện tích điểm e chuyển động trong từ trường đều $\vec{B}$. Chọn trục Oz theo phương của $\vec{B}$. Chiếu (6.39) xuống các trục toạ độ

$$\ddot{x} = \frac{eB}{m}\dot{y} \tag{6.46}$$

$$\ddot{y} = -\frac{eE}{m}\dot{x} \tag{6.47}$$

$$\ddot{z} = 0 \tag{6.48}$$

(6.48) có nghiệm

$$z = z_0 + v_{0z}t \tag{6.49}$$

Trong đó v_{0z} là vận tốc ban đầu của hạt theo phương Oz. Như vậy từ trường không làm ảnh hưởng đến chuyển động của điện tích theo phương Oz (phương của từ trường). Theo phương của từ trường điện tích chuyển động quán tính như khi không có trường.

---

[4] góc giữa $\vec{v}_0$ và $\vec{E}$ là góc nhọn

[5] góc giữa $\vec{v}_0$ và $\vec{E}$ là góc tù

Tích phân hệ (6.46) và (6.47) nhận được[6]

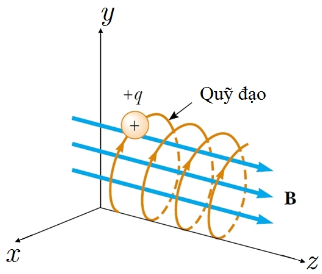
$$\dot{x} = v_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{6.50}$$
$$\dot{y} = v_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{6.51}$$

Trong đó $\omega_0 = \frac{eB}{m}$, $v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ là vận tốc của hạt trên mặt phẳng Oxy, tức là thành phần vận tốc vuông góc với từ trường. Tích phân (6.50) và (6.51) nhận được

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{6.52}$$
$$y = y_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{6.53}$$

Như vậy chuyển đông của điện từ điểm theo phương Ox và Oy là dao động điều hoà với tần số góc $\omega_0 = \frac{eB}{m}$. Khử t trong Từ (6.52) và (6.53) được phương trình quỹ đạo trên mặt phẳng Oxy

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = R^2$$



Hình 6.2:

Như vậy quỹ đạo của điện tích điểm trên mặt phẳng Oxy là đường tròn. $\omega_0 = \frac{eB}{m}$ gọi là *tần số cyclotron*[7] nó chỉ phụ thuộc tỉ số $\frac{e}{m}$ không phụ thuộc vận tốc của điện tích điểm. Bán kính quỹ đạo $R = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{mv_0}{eB}$, nó phụ thuộc tỉ số $\frac{e}{m}$ và vận tốc v_0. Từ đó ta có

$$\frac{mv_0^2}{R} = eBv_0$$

Nghĩa là lực quán tính ly tâm phải cân bằng với lực Lorentz tác dụng lên điện tích điểm.

Như vậy nếu vận tốc của hạt không có thành phần song song với từ trường thì nó chỉ chuyển động tròn đều trong mặt phẳng vuông góc với từ trường. Nếu vận tốc của hạt có thành phần song song với từ trường thì ngoài chuyển động tròn điện tích điểm còn chuyển động thẳng đều theo phương của từ trường, quỹ đạo là đường xoắn đinh ốc (Hình 6.2).

[6]Đặt $\omega_0 = \frac{eB}{m}$, nhân hai vế (6.47) với đơn vị phức i và cộng từng vế với (6.46) ta có

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -i\omega_0 (\dot{x} + i\dot{y})$$
$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\omega_0 (\dot{x} + i\dot{y})$$
$$\dot{x} + i\dot{y} = a e^{-i\omega_0 t}$$

trong đó a là hằng số phức, đặt $a = v_0 e^{-i\alpha}$, v_0 là hằng số thực. Ta có

$$\dot{x} + i\dot{y} = v_0 e^{-i(\omega_0 t + \alpha)} = v_0 [\cos(\omega_0 t + \alpha) + i \sin(\omega_0 t + \alpha)]$$

[7]tần số cyclotron là tần số quay trên quỹ đạo của một hạt mang điện trong từ trường

6.4 Chuyển động của electron trong nguyên tử đặt vào từ trường ngoài

6.4.1 Ảnh hưởng của từ trường ngoài lên dao động và bức xạ của nguyên tử

Xét nguyên tử gồm một hạt nhân đặt ở gốc toạ độ và một electron[8]. Theo thuyết cổ điển nguyên tử bức xạ được coi là một dao động điều hoà, electron dao động xung quanh hạt nhân như một điện tích liên kết đàn hồi.

Gọi $\vec{r}$ là bán kính véctơ xác đinh vị trí của electron, thì phương trình dao động của nó viết dưới dạng phức

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \tag{6.54}$$

Trong đó ω_0 là tần số dao động của electron và cũng là tần số bức xạ.

Có thể coi electron dao động dưới tác dụng của lực đàn hồi[9] $\vec{F}_d = -m_e\omega_0^2\vec{r}$, m_e là khối lượng của electron[10]. Do đó phương trình chuyển động của electron

$$m_e\ddot{\vec{r}} = -m_e\omega_0^2\vec{r} \tag{6.55}$$

Nếu đặt nguyên tử vào từ trường đều $\vec{B}$ và chọn trục Oz theo phương của $\vec{B}$. Khi đó ngoài lực đàn hồi còn có lực Lorentz tác dụng lên electron. Phương trình chuyển động của electron

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\,\vec{r} - \frac{|\mathrm{e}_0|}{m_e}[\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\,] = 0 \tag{6.56}$$

trong đó $(-\,|\mathrm{e}_0|)$ là điện tích của electron[11]. Đặt

$$\omega_L = \frac{|\mathrm{e}_0|\,B}{2m_e} \tag{6.57}$$

ω_L gọi là tần số Larmor. Chiếu (6.56) xuống các trục toạ độ

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x + \omega_L\dot{y} = 0 \tag{6.58}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2\,y - \omega_L\dot{x} = 0 \tag{6.59}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2\,z = 0 \tag{6.60}$$

Dễ thấy nghiệm của (6.60) là

$$z = z_0\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \tag{6.61}$$

Như vậy từ trường ngoài không ảnh hưởng lên dao động của electron theo phương Oz. Tức là theo phương từ trường ngoài nguyên tử vẫn bức xạ với tần số ω_0 như khi chưa có từ trường ngoài

---

[8] nguyên tử Hydro và các ion tương tự

[9] Ở đây ta không cần xét đến lực hãm vì nó không làm ảnh hưởng đến tần số bức xạ

[10] khối lượng của electron $9,1.10^{-31}$ kg

[11] giá trị điện tích của electron là $-1,6.10^{-19}$C

Tìm nghiệm của hệ (6.58) và (6.59) dạng $x = x_0 e^{i\omega t}$; $y = y_0 e^{i\omega t}$. Thay vào (6.58) và (6.59) ta có

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) x_0 + 2i\omega\omega_L y_0 = 0$$
$$-2i\omega\omega_L x_0 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) y_0 = 0$$

Để $x_0 \neq 0$; $y_0 \neq 0$ (để cho $x \neq 0$; $y \neq 0$) thì định thức của hệ phương trình đối với x_0 và y_0 trên phải bằng 0

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \left(2\omega\omega_L\right)^2 = 0$$
$$\omega = \pm\omega_L \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} \tag{6.62}$$

Tần số của electron trong nguyên tử cỡ tần số ánh sáng $\omega_0 = 10^{15}\mathrm{s}^{-1}$. Đối với các từ trường trong khoa học kỹ thuật luôn có $\omega_L \ll \omega_0$. Do đó (6.62) trở thành $\omega = \pm\omega_L \pm \omega_0$. Do tần số phải dương nên

$$\omega = \omega_0 \pm \omega_L \tag{6.63}$$

Kết quả nghiệm của hệ (6.58) và (6.59) có dạng

$$x = x_0 e^{i(\omega_0 \pm \omega_L)t} \tag{6.64}$$
$$y = y_0 e^{i(\omega_0 \pm \omega_L)t} \tag{6.65}$$

Như vậy theo phương vuông góc với từ trường ngoài nguyên tử bác xạ hai tần số $\omega = \omega_0 + \omega_L$ và $\omega = \omega_0 - \omega_L$. Hiện tượng trên gọi là *hiệu ứng Zeemann thường*. Khoảng cách giữa hai vạch bức xạ

$$\Delta\omega = 2\omega_L = \frac{|\mathrm{e}_0|\, B}{m_e} \tag{6.66}$$

Khoảng cách giữa hai vạch bức xạ cho phép xác định tỉ số $\frac{|\mathrm{e}_0|}{m_e}$ của electron.

Thực nghiệm cho thấy nếu vật chất ở thể khí đặt trong từ trường ngoài khi bức xạ sẽ cho vạch ba (tam tuyến) và (6.66) phù hợp với thực nghiệm ở độ chính xác cao. Thực tế trong phần lớn các trường hợp các vạch bức xạ bị suy biến một cách phức tạp[12] và không thể giải thích trong phạm vi điện động lực học cổ điển.

6.4.2 Chuyển động tiến động của electron

Khảo sát chuyển động của electron trong nguyên tử. Để đơn giản ta cũng xét nguyên tử gồm một hạt nhân ở gốc toạ độ và và một electron quay quanh nhân với vân tốc $\vec{v}$.

Mômen xung lượng của electron

$$\vec{L} = m_e \left[\vec{r} \times \vec{v}\right] \tag{6.67}$$

Do electron chuyển động theo quỹ đạo khép kín nên mômen từ của electron

$$\vec{M} = \frac{I}{2} \oint \left[\vec{r} \times d\vec{r}\right] = \frac{1}{2} \oint \left[\vec{r} \times \vec{v}\right] \rho\, dV$$

[12] hiệu ứng Zeemann dị thường

Trong đó $Id\vec{r} = \vec{j}\,dV = \vec{v}\rho\,dV$ và mật độ điện tích ρ có giá trị âm. Trong nguyên tử chỉ có một electron nên không có dòng liên tục, vì vậy cường độ dòng điện I là đại lượng đã lấy trung bình theo thời gian. Do đó ρ và $[\vec{r}\times\vec{v}]$ cũng là các dại lượng đã lấy trung bình. Chúng không phụ thuộc toạ độ nên có thể đưa ra ngoài dấu tích phân. Do đó

$$\vec{M} = \frac{1}{2}[\vec{r}\times\vec{v}]\,\rho\int dV = -\frac{|e_0|}{2}[\vec{r}\times\vec{v}] \tag{6.68}$$

Từ (6.67) và (6.68) rút ra

$$\vec{M} = -\frac{|e_0|}{2m_e}\vec{L} \tag{6.69}$$

Mômen từ và mômen xung lượng của electron là hai véctơ cùng phương nhưng ngược chiều. Nếu nguyên tử có nhiều electron, mỗi electron có mômen từ và mômen xung lượng là $\vec{L}_i$ và $\vec{M}_i$ thì mômen từ và mômen xung lượng toàn phần

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i\,; \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

và (6.69) vẫn thoả mãn.

Nếu nguyên tử đặt trong từ trường không đổi $\vec{B}$ và chọn Oz trùng với $\vec{B}$. Theo (3.76) mômen lực tác dụng lên dòng nguyên tử $\vec{N} = [\vec{M}\times\vec{B}]$. Do đó ta có

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = [\vec{M}\times\vec{B}] = -\frac{|e_0|}{2m_e}[\vec{L}\times\vec{B}] = [\vec{\omega}_L\times\vec{L}] \tag{6.70}$$

Trong đó

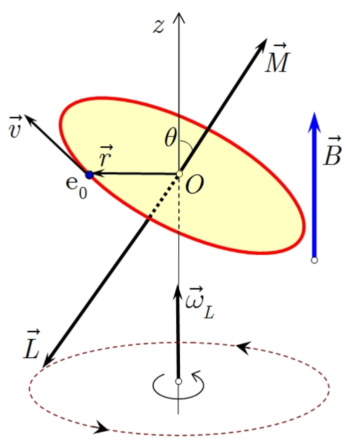
$$\vec{\omega}_L = \frac{|e_0|\,\vec{B}}{2m_e} \tag{6.71}$$

là véctơ cùng phương chiều với $\vec{B}$ có độ lớn bằng tần số Larmor.

So sánh (6.70) với phương trình chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định với vận tốc góc $\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$$

dễ thấy véctơ $\vec{L}$ quay quanh phương của từ trường với vận tốc góc bằng tần số Larmor (Hình 6.3). Điều đó nghĩa là khi chưa có từ trường ngoài electron chuyển động quay quanh trục Oz với vận tốc góc $\vec{\omega}_0$. Khi có từ trường ngoài thì electron tham gia hai chuyển động; một là chuyển động quay xung quanh hạt nhân (chuyển động quay quanh gốc O) với vận tốc $\vec{\omega}_0$; hai là chuyển động quay xung quanh phương của từ trường ngoài (chuyển động quay quanh trục Oz) với vận tốc $\vec{\omega}_L$. Chuyển động của electron như vậy gọi là *sự tiến động Larmor*. Tất cả các electron trong nguyên tử đều chuyển động



Hình 6.3:

tiến động với cùng một vận tốc góc và cùng một
chiều.

Khi chiếu (6.70) lên phương song song với từ trường ngoài (trục Oz) ta thấy electron vẫn dao động với tần số ω_0 như khi chưa có từ trường ngoài. Còn khi chiếu (6.70) lên phương vuông góc với từ trường (mặt phẳng Oxy) thì tần số dao động của các electron thay đổi một lượng ω_L. Tần số có thể tăng thêm hay giảm đi lượng ω_L phụ thuộc vào chiều quay ban đầu của electron cùng chiều hay ngược chiều với chuyển động tiến động. Như vậy *sự tiến động Larmor chính là nguyên nhân gây ra hiệu ứng Zeemann.*

Chương 7

Điện môi và từ môi

7.1 Sự phân cực của điện môi trong điện trường

7.1.1 Sự phân cực của các điện môi có phân tử không cực

Các phân tử vật chất nói chung trung hoà về điện. Nếu mômen lưỡng cực của phân tử bằng không khi không có từ trường ngoài thì phân tử đó không có cực. Các điện tích trong phân tử không thể dịch chuyển tự do trong điện môi. Khi đặt điện môi vào điện trường ngoài, các điện tích trong mỗi phân tử dịch chuyển đi một ít, phân tử bị biến dạng và trong phân tử xuất hiện mômen lưỡng cực $\vec{p}$. Các điện tích dương dịch chuyển theo chiều điện trường ngoài còn các điện tích âm dịch chuyển theo phương ngược lại, do đó mômen lưỡng cực $\vec{p}$ bao giờ cũng cùng chiều với điện trường ngoài.

Đối với các điện môi có mặt dộ vật chất nhỏ (ví dụ như khí loãng) có thể coi điện trường tác dụng lên mỗi phân tử bằng điện trường vĩ mô $\vec{E}$ trong trường hợp $\vec{E}$ không quá lớn

$$\vec{p} = \alpha_0 \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7.1}$$

Trong đó α_0 gọi là độ phân cực của phân tử. Do đó nếu trong đơn vị thể tích có N phân tử thì véctơ phân cực

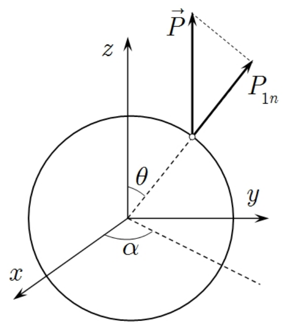
$$\vec{P} = N\alpha_0 \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7.2}$$

So sánh với (2.33) ta có độ cảm điện môi $\alpha = N\alpha_0$. Khi đó hệ số điện môi có dạng

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + N\alpha_0) \tag{7.3}$$

Độ phân cực α_0 của phân tử chỉ phụ thuộc vào tính chất nội tại của phân tử mà không phu thuộc các đaik lượng vĩ mô (mật độ vậ chất, nhiệt độ, áp suất...), do đó trong trường hợp này ε chỉ là hàm tuyến tính của mật độ vật chất N.

Đối với trường hợp điện môi có mặt độ vật chất lớn (ví dụ các khí đặc, chất lỏng) hiện tượng xảy ra cũng như trên nhưng điện trường tác dụng lên phân



Hình 7.1:

tử $\vec{E}^*$ sẽ là tổng của điện trường ngoài và điện trường
phụ do điện môi phân cực gây ra

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{E}' \tag{7.4}$$

Để tính $\vec{E}'$ lấy một mặt cầu vĩ mô nhỏ có tâm tại phân tử đang xét (Hình 7.1). Như vậy $\vec{E}'$ gồm $\vec{E}_1$ do điện môi phân cực trong hình cầu gây ra và $\vec{E}_2$ do điện môi phân cực ở ngoài hình cầu gây ra

$$\vec{E}' = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{7.5}$$

Để tính $\vec{E}_2$ sử dụng phương pháp của điện động lực học vĩ mô, tức là coi điện môi là môi trường liên tục. Vì hình cầu là nhỏ nên có thể coi môi trường xung quanh hình cầu là phân cực đều. $\vec{E}_2$ do các điện tích liên kết ρ_l trên bề mặt hình cầu gây ra. Nếu tách bỏ hình cầu khỏi môi trường đang xét thì điện tích này bằng

$$\rho_l = p_{1n} - p_{2n} = p_{1n} \tag{7.6}$$

Hướng trục Oz theo véctơ phân cực $\vec{P}$ ta có

$$\rho_l = p_{1n} = p\cos\theta \tag{7.7}$$

Mặt khác điện tích trên vi phân diện tích dS trên mặt cầu $dq = \rho_l r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta$ trong đó r là bán kính mặt cầu. Điện tích này gây ra theo phương Oz một điện trường

$$dE_2 = dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\theta \tag{7.8}$$

Thay (7.7), (**??**) vào (7.8) được

$$E_2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{p}{3\varepsilon_0} \tag{7.9}$$

Đó là trường do các điện tích phân cực ở ngoài hình cầu gây ra.

Ta có thể tính điện trường do các điện tích trong hình cầu gây ra đối với trường hợp riêng khi các phân tử nằm ở các nút của mạng lập phương. Đặt gốc tọa độ tại phân tử đang xét và hướng các trục tọa độ x, y, z theo các trục của mạng lập phương. Để tính $\vec{E}_1$ ta sử dụng (2.20)

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{3(\vec{p}_i\vec{r}_i)\vec{r}_i - \vec{p}_i\vec{r}_i^{\,2}}{r_i^5} \tag{7.10}$$

trong đó tổng lấy theo tất cả các phân tử có trong hình cầu.

Do tính đối xứng lập phương của mạng nên

$$\sum_i \frac{x_i^2}{r_i^5} = \sum_i \frac{y_i^2}{r_i^5} = \sum_i \frac{z_i^2}{r_i^5}\ ;\ \sum_i \frac{x_i y_i}{r_i^5} = \sum_i \frac{z_i y_i}{r_i^5} = \sum_i \frac{x_i z_i}{r_i^5} = 0$$

Chiếu (7.10) lên trục Ox và vì tất cả $p_i = p$ nên

$$E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{3(p_x x_i + p_y y_i + p_z z_i)x_i - p_x\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)}{r_i^5} = 0$$

Tương tự ta có $E_{1y} = E_{1z} = 0$. Do đó

$$\vec{E}_1 = 0 \tag{7.11}$$

Từ các kết quả trên ta có

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \frac{\vec{p}}{3\varepsilon_0} \tag{7.12}$$

(7.12) chỉ là gần đúng vì trường của các phân tử không chỉ là trường của các lưỡng cực, các mạng điện môi có thể không đối xứng lập phương và mômen lưỡng cực của các phân tử cũng không phải hoàn toàn bằng nhau như giả thiết. Thay $\vec{E}$ trong (7.2) bằng $\vec{E}^*$ theo (7.12) ta có

$$\vec{P} = N\alpha_0\varepsilon_0\vec{E}^* = N\alpha_0\varepsilon_0\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$\vec{P} = \frac{N\alpha_0}{1 - \frac{N\alpha_0}{3}}\varepsilon_0\vec{E} \tag{7.13}$$

Mặt khác ta có $\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\left(\varepsilon' - 1\right)\vec{E}$ do đó ta có

$$\alpha = \frac{3N\alpha_0}{1 - N\alpha_0} \tag{7.14}$$

$$\varepsilon' = 1 + \frac{3N\alpha_0}{3 - N\alpha_0} \tag{7.15}$$

(7.15) là công thức Lorent – Lorentz. Đối với môi trường có mật độ vật chất nhỏ $\varepsilon' \approx 1$, thì $\varepsilon' - 1 = N\alpha_0$ hay

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 + N\alpha_0\right) \tag{7.16}$$

(7.15) phù hợp tốt với thực nghiệm. Tuy nhiên nó không áp dụng được cho các điện môi rắn vì trong vật rắn tương tác giữa các phân tử khá lớn, nó chưa được tính đến trong (7.15).

7.1.2 Sự phân cực của các điện môi có phân tử có cực

Phân tử được gọi là có cực nếu mômen lưỡng cực của nó khác không ngay cả khi không có điện trường ngoài. Trong tự nhiên tồn tại nhiều phân tử có mômen lưỡng cực p không đổi[1].

Mômen lưỡng cực $\vec{p}$ đặt trong điện trường $\vec{E}$ có thế năng

$$U = -\vec{p}\vec{E}$$

Trạng thái bền vững của phân tử là trạng thái có năng lượng cực tiểu nên mômen lưỡng cực của phân tử sẽ quay cho đến khi trùng với phương của điện trường ngoài. Tuy nhiên do chuyển động nhiệt của phân tử làm phã vỡ sự định hướng của các mômen lưỡng cực. Do đó cuối cùng sẽ có trạng thái cân bằng động.

[1] Thông thường các phân tử có mômen lưỡng cực khoảng từ 10^{-28} đến 10^{-29} C.m

Chọn trục Oz theo phương điện trường ngoài, ta có

$$U = -pE\cos\theta = -p_z E \tag{7.17}$$

Như vậy công thức Boltzmann đặc trưng cho phân bố các hạt theo năng lượng trở thành công thức đặc trưng cho sự phân bố của mômen lưỡng cực theo góc. Nếu gọi dN là số phân tử có mômen lưỡng cực nằm trong góc khối $d\Omega$ thì

$$dN = N_0 \exp\Big(-\frac{W}{k_B T}\Big) d\Omega = N_0 \exp\Big(\frac{pE\cos\theta}{k_B T}\Big)\sin\theta d\varphi d\theta \tag{7.18}$$

trong đó k_B là hằng số Boltzmann[2]. Do đó giá trị trung bình của p_z là

$$\langle p_z\rangle = \frac{\int p_z dN}{\int dN} = \frac{p\int_0^\pi \exp\Big(\frac{pE\cos\theta}{k_B T}\Big)\cos\theta\sin\theta d\theta}{\int_0^\pi \exp\Big(\frac{pE\cos\theta}{k_B T}\Big)\sin\theta d\theta}$$

Đặt $a = \frac{pE}{k_B T}$ ta có

$$J = \int_0^\pi \exp(a\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{1}{a}\exp(a\cos\theta)\Big|_0^\pi = \frac{2}{a}\operatorname{sh} a\,;$$

$$\int_0^\pi \exp(a\cos\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{dJ}{da} = \frac{2}{a}\Big(\operatorname{ch} a - \frac{\operatorname{sh} a}{a}\Big)$$

Kết quả ta có

$$\langle p_z\rangle = p\Big[\coth\Big(\frac{pE}{k_B T}\Big) - \frac{k_B T}{pE}\Big] \tag{7.19}$$

Ở nhiệt độ thường và cường độ điện trường $\vec{E}$ không quá lớn $\frac{pE}{k_B T} \ll 1$, ta có

$$\coth\Big(\frac{pE}{k_B T}\Big) = \frac{k_B T}{pE} + \frac{pE}{3k_B T} - \frac{1}{45}\Big(\frac{pE}{k_B T}\Big)^2 + \cdots \approx \frac{k_B T}{pE} + \frac{pE}{3k_B T}$$

Khi đó

$$\langle p_z\rangle = \frac{p^2 E}{3k_B T} \tag{7.20}$$

từ đó véctơ phân cực

$$\vec{P} = P_z\vec{e}_z = N\langle p_z\rangle\vec{e}_z = \frac{Np^2\vec{E}}{3k_B T} \tag{7.21}$$

Nếu môi trường có mật độ vật chất lớn thì phải thay $\vec{E}$ bằng $\vec{E}^*$ theo (7.12), khi đó

$$\vec{P} = \frac{Np^2\vec{E}^*}{3k_B T} \tag{7.22}$$

$$\frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 2} = \frac{Np^2}{9\varepsilon_0 k_B T} \tag{7.23}$$

[2]hằng số Boltzmann $k_B = 1,38.10^{-23}\text{J.K}^{-1} = 8,617.10^{-5}\text{eV.K}^{-1}$

7.1.3 Nhận xét

(a) Trong thực tế phần lớn các vật chất đều có cả tính chất của phân tử có cực và không cực. Kết hợp (7.15) và (7.23) ta có

$$\frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 2} = \frac{N}{3}\Big(\alpha_0 + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 k_B T}\Big) \tag{7.24}$$

Đó là công thức Claussius – Mossotti.

(b) Đối với môi trường có mật độ vật chất nhỏ (khĩ loãng) $\varepsilon' \approx 1$ từ (7.24) ta có

$$\varepsilon = \varepsilon_0\Big[1 + N\Big(\alpha_0 + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 k_B T}\Big)\Big] \tag{7.25}$$

Đó là công thức Langevin – Debye. Nó phù hợp tốt với thực nghiệm.

(c) Đối với điện trường rất lớn hoặc nhiệt độ rất thấp thì $\frac{pE}{k_BT} \gg 1$, khi đó $\coth\left(\frac{pE}{k_BT}\right) - \frac{k_BT}{pE} \approx 1$ nên

$$\langle p_z \rangle = p \tag{7.26}$$

Nghĩa là tất cả các mômen lưỡng cực đều được định hướng theo trường ngoài và phân cực đạt giá trị cực đại (hiện tượng phân cực bão hoà). Khi đó véctơ phân cực bão hoà

$$\vec{P}_S = N\vec{p} \tag{7.27}$$

Lý thuyết được dẫn ra với sự phân cực của điện môi trông điện trường ngoài là cơ sở để nghiên cứu hiệu ứng tán sắc và hiệu ứng phân cực của môi trường.

7.2 Thuyết cổ điển về tán sắc

7.2.1 Hiện tượng tán sắc

Theo (5.64) thì chiết suất tuyệt đối của môi trường là

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon'}$$

Theo công thức trên chiết suất không phụ thuộc tần số sóng điện từ. Thực ra điều đó chỉ đúng với các sóng điện từ có tần số tương đối nhỏ. Đối với sóng điện từ có tần số khá lớn (ví dụ như sóng ánh sáng) thì chiết suất của môi trường phụ thuộc tần số của sóng điện từ. Đó là *hiện tượng tán sắc ánh sáng*. Thuyết cổ điển về tán sắc dựa trên các lập luận chưa được chặt chẽ lắm nhưng các kết quả tìm được phù hợp với các kết quả phù hợp với kết quả tính toán trong cơ học lượng tử và đo được bằng thực nghiệm.

Theo thuyết cổ điển electron trong nguyên tử được coi là dao động tử điều hoà dưới tác dụng của hai lực, một là lực đàn hồi $-m_e\omega_0^2\vec{r}$ giữ cho electron dao động quanh vị thí cân bằng với tần số ω_0, hai là lực hãm $-m_e\gamma\dot{\vec{r}}$ làm cho dao động tắt dần (γ là hệ số tắt dần). Khi có sóng điện từ truyền tới nguyên tử, thành phần điện trường $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$ tác dụng lên electron một lực $-|\mathrm{e}_0| \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$. Khi đó phương trình dao động của electron

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{|\mathrm{e}_0|}{m_e} \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \tag{7.28}$$

Tìm nghiệm của (7.28) dạng $\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(i\omega t)$, thay vào (7.28) tìm được

$$\vec{r} = -\frac{|\mathrm{e}_0|}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E} \tag{7.29}$$

Giả sử đối với điện trường biến thiên tuần hoàn nguyên tử vẫn phân cực theo quy luật như (7.1), nghĩa là

$$\vec{p} = -|\mathrm{e}_0| \vec{r} = \alpha_0 \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7.30}$$

Do đó

$$\alpha_0 = -\frac{|\mathrm{e}\ _0| r}{\varepsilon_0 E} = \frac{\mathrm{e}_0^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \tag{7.31}$$

Nếu chỉ xét điện môi là chất khí loãng không phân cực, ta có

$$\varepsilon' = 1 + N\alpha_0 = 1 + \frac{N\mathrm{e}_0^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{7.32}$$

Nếu xét các điện môi có mật độ vật chất lớn thì phải xét đến trường tác dụng $\vec{E}^*$, khi đó kết quả tính toán phức tạp hơn nhưng kết quả tính ra không khác với trường hợp khí loãng.

7.2.2 Hiện tượng tán sắc thường và tán sắc dị thường

Hệ số điện môi là một số phức do đó chiết suất của môi trường cũng là một số phức. Do đó sóng điện từ phải tắt dần khi lan truyền trong điện môi. Phần ảo của chiết suất phức xác định độ tắt dần của sóng điện từ. Ta có

$$\varepsilon' = n^2 - \left(n_1 - in_2\right)^2 = n_1^2 - n_2^2 - 2in_1 n_2$$

Với n_1, n_2 là những số thực, so sánh với (7.32) được

$$n_1^2 - n_2^2 = 1 + \frac{N\mathrm{e}_0^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{7.33}$$

$$2n_1 n_2 = \frac{N\mathrm{e}_0^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{7.34}$$

Xét ba trường hợp sau

Trường hợp 1: $\omega^2\gamma^2 \ll \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2$ và $\omega \ll \omega_0$ (Ứng với các dòng xoay chiều trong kỹ thuật)

Khi đó ta có $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2 \approx \omega_0^4$, nên $n_1 n_2 \approx 0$. Tức là phần ảo bằng không, n là số thực ($n_1 \neq 0,\ \ n_2 = 0$)

$$n^2 = n_1^2 = 1 + \frac{N\mathrm{e}_0^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2} > 1$$

Vậy trong trường hợp này sóng điện từ không bị tắt dần, chiết suất không phụ thuộc tần số của sóng tới và không có hiện tượng tán sắc

Trường hợp 2: $\omega^2\gamma^2 \ll \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2$ và $\omega \gg \omega_0$ (Ứng với sóng ánh sáng, tia Roentgen)

Khi đó ta có $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2 \approx \omega^4$, nên $n_1 n_2 \approx 0$. Tức là phần ảo bằng không, n là số thực ($n_1 \neq 0,\ \ n_2 = 0$)

$$n^2 = n_1^2 = 1 - \frac{N\mathrm{e}_0^2}{m_e\varepsilon_0\omega_0^2} < 1$$

Vậy trong trường hợp này sóng điện từ không bị tắt dần, chiết suất nhỏ hơn 1 và phụ thuộc tần số của sóng tới. Khi ω tăng thì n tăng, sự phụ thuộc chiết suất vào tần số sóng tới như vậy gọi là *hiện tượng tán sắc thường*. Khi $\omega \longrightarrow \infty$ thì $n \longrightarrow 1$

Hai miền tần số trong hai trường hợp trên gọi là *miền trong suốt*, trong miền tần số đó không có sự hấp thụ sóng điện từ.

Trường hợp 3: $\omega \approx \omega_0$

Để đơn giản ta chỉ xét các chất khí có $\varepsilon' \approx 1$. Ta có thể viết $\varepsilon' = 1 + \delta$ trong đó $\delta \ll 1$. Do đó $\sqrt{\varepsilon'} = 1 + \frac{1}{2}\delta$. Khi đó từ (7.32) rút ra

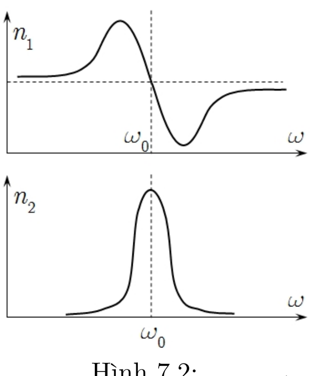
$$n = \sqrt{\varepsilon'} = 1 + \frac{N\mathrm{e}_0^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Do đó

$$n_1 = 1 + \frac{N\mathrm{e}_0^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$
$$n_2 = \frac{N\mathrm{e}_0^2}{2m_e\varepsilon_0}\frac{\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Phần ảo n_2 đạt giá trị cực đại khi $\omega = \omega_0$. Khi $\omega \approx \omega_0$ nó có giá trị lớn hơn các miền khác. Trong miền tần số này sóng điện từ bị hấp thụ mạnh nhất, nên miền tần số này được gọi là *miền hấp thụ*.

Phần thực có giá trị $n_1 = 1$ khi $\omega = \omega_0$. Khi $\omega < \omega_0$ thì $n_1 > 1$ và khi $\omega > \omega_0$ thì $n_1 < 1$. Nghĩa là khi tần số sóng tới ω tăng thì chiết suất môi trường n giảm. Đó là hiện tượng *tán sắc dị thường*.



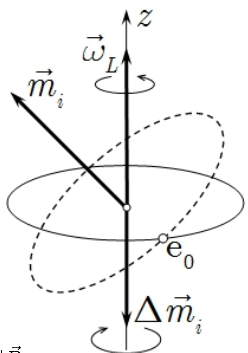
Hình 7.2:

Trong cách khảo sát trên ta đã giả thiết tần số dao động riêng của tất cả các electron là ω_0. Thực ra trong nguyên tử có nhiều mối liên kết khác nhau giữa các electron với hạt nhân, tương ứng với các tần số riêng khác nhau ω_{01}, ω_{02}, $\omega_{03}\ldots$ Ứng với mỗi tần số riêng là một miền hấp thụ riêng, tại đó có hiện tượng tán sắc dị thường. Đồ thị của n_1 và n_2 sẽ phức tạp hơn nhiều.

7.3 Nghịch từ và thuận từ

Khi đặt từ môi và từ trường ngoài thì trong từ môi xuất hiện từ trường phụ bổ sung thêm vào từ trường ngoài. Đối với chất thuận từ từ trường phụ cùng chiều với từ trường ngoài. Đối với chất nghịch từ, từ trường phụ ngược chiều với từ trường ngoài.

7.3.1 Nghịch từ



Hình 7.3:

Khi không có từ trường ngoài mỗi electron trong nguyên tử có một mômen từ $\vec{m}_i \neq 0$. Các mômen từ trong nguyên tử sắp xếp đối xứng và trung hoà lẫn nhau nên mômen từ của nguyên tử bằng không

$$\vec{m} = \sum_i \vec{m}_i = 0 \tag{7.35}$$

Mỗi electron có chiều quay riêng nhưng khi nguyên tử đặt vào từ trường ngoài thì mọi electron quay tiến động theo cùng một chiều với cùng vận tốc góc $\vec{\omega}_L = \frac{|e_0|\vec{B}}{2m_e}$. Do đó mỗi electron được bổ sung thêm mômen từ $\Delta\vec{m}_i$ ngược chiều với từ trường ngoài và không phụ thuộc chiều quay ban đầu của electron. Mômen từ bổ sung của cả nguyên tử là

$$\Delta\vec{m} = \sum_i \Delta\vec{m}_i \tag{7.36}$$

Như vậy do tác dụng của từ trường ngoài, mômen từ của nguyên là $\vec{m} + \Delta\vec{m}_i = \Delta\vec{m}_i$ ngược chiều với từ trường ngoài. Do đó trong chất nghịch từ xuất hiện véctơ từ hóa $\vec{I}$ ngược chiều với từ trường ngoài và bằng

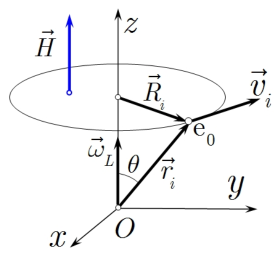
$$\vec{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \Delta\vec{m}_i \tag{7.37}$$

Tổng lấy theo tất cả tất cả electron có trong thể tích nhỏ vĩ mô ΔV. Chất nghịch từ do đó bị nhiễm từ ngược chiều với từ trường ngoài.

Chọn gốc toạ độ trùng với hạt nhân, trục Oz theo phương của từ trường ngoài. Gọi $\vec{r}_i$ là bán kính véctơ của electron thứ i (Hình 7.4). Mômen từ của nguyên tử do sự tiến động của các electron gây ra

$$\vec{m} = \Delta\vec{m} = \frac{I}{2} \sum_i [\vec{R}_i \times d\vec{R}_i]$$

Ta có



Hình 7.4:

$$Id\vec{R}_i = Idt\frac{d\vec{R}_i}{dt} = -|e_0|\,\vec{v}_i$$

$\vec{v}_i = \omega_L R_i$ là vận tốc của electron thứ i trong chuyển động tiến động. Do đó

$$\vec{m} = -\frac{|e_0|}{2} \sum_i [\vec{R}_i \times \vec{v}_i] \tag{7.38}$$

Do $\vec{m}$ chỉ có một thành phần m_z nên

$$m = m_z = -\frac{|\mathrm{e}_0|\ \omega_L}{2}\sum_i R_i^2 \tag{7.39}$$

Để ý $R_i^2 = x_i^2 + y_i^2$; $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$; $\langle x_i^2\rangle = \langle y_i^2\rangle = \langle z_i^2\rangle = \frac{1}{3}\langle r_i^2\rangle$; $\frac{2}{3}\langle R_i^2\rangle = \langle r_i^2\rangle$. Lấy trung bình (7.39)

$$\langle m\rangle = -\frac{|\mathrm{e}_0|}{2}\omega_L\Big\langle\sum_i R_i^2\Big\rangle = -\frac{1}{3}|\mathrm{e}_0|\,\omega_L Z\langle r^2\rangle \tag{7.40}$$

trong đó Z là số electron trong nguyên tử và $\langle r^2\rangle$ là giá trị trung bình của bình phương khoảng cách từ hạt nhân đến các electron. Nếu N là số nguyên tử trong một đơn vị thể tích thì véctơ từ hoá $\vec{I} = N\langle m_z\rangle\vec{e}_z$. Với $\omega_L = \frac{|\mathrm{e}_0|\mu_0 H}{2m_e}$ ta có

$$\vec{I} = -\frac{N\mathrm{e}_0^2\mu_0 Z}{6m_e}\langle r^2\rangle\vec{H} \tag{7.41}$$

Véctơ từ hoá ngược chiều với từ trường ngoài. So sánh với (3.42) và (3.44) ta có độ cảm từ môi của chất nghịch từ

$$\beta_N = -\frac{NZ\mathrm{e}_0^2\mu_0}{6m_e}\langle r^2\rangle \tag{7.42}$$

Độ cảm từ môi của chất nghịch từ là số âm, không phụ thuộc nhiệt độ và chỉ phụ thuộc mật độ vật chất của môi trường. (7.42) phù hợp với thực nghiệm nếu ta lấy $\langle r^2\rangle$ là giá trị bình phương bán kính trung bình của nguyên tử tính được trong cơ học lượng tử.

7.3.2 Thuận từ

Khi chưa có từ trường ngoài thì mỗi nguyên tử của chất thuận từ có một mômen từ $\vec{m}_0 \neq 0$, nhưng các mômen từ đó sắp xếp hỗn độn theo mọi phương nên véctơ từ hoá $\vec{I}$ bằng không và chất thuận từ khi đó không có từ tính.

Khi đặt chất thuận từ vào từ trường ngoài $\vec{B}$ thì có sự bổ sung mômen từ do chuyển động tiến động của electron (giống như chất nghịch từ) và sự định hướng lại mômen từ của các nguyên tử (giống như điện môi của các phân tử có cực). Tác dụng của mômen từ bổ sung rất yếu so với tác dụng của sự định hướng các nguyên tử, do đó có thể bỏ qua.

Thế năng của nguyên tử trong từ trường ngoài $\vec{B}$

$$U = -\vec{m}_0\vec{B} \tag{7.43}$$

Từ trường ngoài có xu hướng xoay các mômen từ cùng hướng với trường, cong chuyển động nhiệt của các nguyên tử lại cản trở sự định hướng đó. Cơ cấu của sự từ hóa của chất thuận từ giống như sự phân cực của điện môi của các phân tử có cực. Lập luận tương tự như mục 7.1.2 (trang 87), kết quả được

$$\vec{I} = \frac{Nm_0^2}{3k_BT}\vec{B} = \frac{Nm_0^2\mu}{3k_BT}\vec{H} \tag{7.44}$$

N là số nguyên tử trong một đơn vị thể tích. Véctơ từ hoá cùng chiều với từ trường ngoài. So sánh với (3.44) ta có độ cảm thuận từ

$$\beta_T = \frac{Nm_0^2\mu}{3k_BT} = \frac{Nm_0^2}{3k_BT}\mu_0\left(1+\beta_T\right)$$
$$\frac{\beta_T}{1+\beta_T} = \frac{Nm_0^2}{3k_BT}\mu_0 \tag{7.45}$$

Đối với các chất thuận từ $\beta_T \ll 1$ nên

$$\beta_T = \frac{Nm_0^2}{3k_BT}\mu_0 \tag{7.46}$$

Độ cảm thuận từ là một số dương phụ thuộc cả mật độ và nhiệt độ của môi trường. Cho $N = \text{const}$ thì

$$\beta_T \sim \frac{1}{T} \tag{7.47}$$

Đó là định luật Curie. Công thức trên phù hợp tốt với thực nghiệm đối với chất thuận từ thể khí và nhiều chất thuận từ thể rắn. khi từ trường ngoài đủ mạnh thì có hiện tượng bão hoà từ và véctơ từ hoá bão hoà bằng

$$\vec{I}_S = N\vec{m}_0 \tag{7.48}$$

7.4 Thuyết cổ điển về sắt từ

Các từ môi có khả năng phân cực tự phát gọi là các chất sắt từ. Về hình thức có thể giải thích bằng cách đưa vào trường tác dụng $\vec{B}^*$. Trường này là tổng của trường vĩ mô $\vec{B}$ và trường phân tử $\vec{B}'$. Trường phân tử của chất sắt từ rất lớn và tỉ lệ với véctơ từ hoá $\vec{I}$. Cho nên

$$\vec{B}^* = \vec{B} + h\vec{I} \tag{7.49}$$

trong đó h là hằng số đặc trưng cho sự cấu trúc của môi trường và có giá trị rất lớn. Ta cũng có thể viết (7.49) dưới dạng

$$\vec{B}^* = \mu_0\vec{H} + \gamma\vec{I} \tag{7.50}$$

với $\gamma = \mu_0 + h$. Số hạng $\gamma\vec{I}$ đặc trưng cho sự phân cực toàn phần của sắt từ. Sự từ hóa của sắt từ cũng tương tự như sự từ hoá của chất thuận từ. mômem từ $\vec{m}$ của các nguyên tử được định hướng lại do tác dụng của trường ngoài và chuyển động nhiệt làm cản trở sự định hướng đó.

Khi chất sắt từ đặt vào môi trường ngoài, mỗi nguyên tử có thế năng bằng

$$U = -\vec{m}\vec{B}^*$$

Lập luận tương tự như mục 7.1.2 (trang 87) được kết quả

$$\langle m_z\rangle = m\Big(\coth a - \frac{1}{a}\Big) \tag{7.51}$$

Với

$$a = \frac{mB^*}{k_BT} = \frac{m\mu_0H}{k_BT} + \frac{m\gamma I}{k_BT} \tag{7.52}$$

Gọi N là số nguyên tử có trong đơn vị thể tích. Khi đó giá trị của véctơ từ hoá bằng

$$I = N\langle m_z\rangle = Nm\Big(\coth a - \frac{1}{a}\Big) \tag{7.53}$$

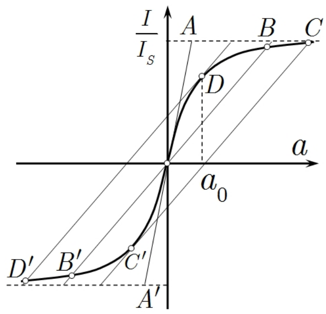
Đưa vào các kí hiệu

$$I_S = Nm\,; \quad b = \frac{Nk_BT}{\gamma I_S^2} \tag{7.54}$$

ta có thể viết lại (7.52) và (7.53) theo

$$\frac{I}{I_S} = \coth a - \frac{1}{a} \tag{7.55}$$

$$\frac{I}{I_S} = ba - \frac{\mu_0 H}{\gamma I_S} \tag{7.56}$$



Hình 7.5:

trong đó I_S là giá trị bão hoà của véctơ từ hóa, do đó γI_S là giá trị cực đại của trường phân tử. Để xác định I ta phải tìm điểm cắt giữa đường cong (7.55) và đường thẳng (7.56) là các hàm của a (Hình 7.5)

Khi $\vec{B} = 0$, do độ dốc đường cong (7.55) tại gốc toạ độ bằng $\frac{1}{3}$ nên khi $b > \frac{1}{3}$ đường thẳng (7.56) chỉ cắt đường cong một điểm tại $a = 0$. Như vậy môi trường không bị từ hoá. Khi $b < \frac{1}{3}$, đường thẳng, ví dụ $B'B$, có ba điểm cắt đường cong nhưng chỉ có hai điểm B và B' ứng với trạng thái bền của sắt từ. Như vậy khi $b < \frac{1}{3}$ có hiện tượng từ hoá tự phát với giá trị bằng tung độ của điểm B và B'. Giới hạn phân chia vùng từ hoá tự phát có thể tìm được từ điều kiện $b = \frac{1}{3}$, theo (7.54) nhiệt độ tương ứng bằng

$$T = \frac{\gamma I_S^2}{3k_BN} = \theta \tag{7.57}$$

Nó có tính chất như nhiệt độ giới hạn và được gọi là *nhiệt độ Curie*.

Tại nhiệt độ lớn hơn nhiệt độ Curie năng lượng chuyển động nhiệt của các phân tử lớn làm phá vỡ định hướng mômen từ của chúng. Do đó chất sắt từ mất tính từ hóa tự phát và trở thành chất thuận từ. Giả thiết tại nhiệt độ T lớn hơn nhiệt độ Curie $a \ll 1$, khi đó từ (7.55) ta có

$$\frac{I}{I_S} = \frac{a}{3} = \frac{1}{3}\frac{I_S}{Nk_BT}(\mu_0 H + \gamma I)$$

$$I = \frac{I_S^2\mu_0 H}{3Nk_B\left(T - \frac{\gamma I_S^2}{3Nk_B}\right)} \tag{7.58}$$

Đặt $C = \frac{\mu_0 I_S}{3Nk_B}$, sử dụng (7.57) có thể viết lại

$$I = \frac{C}{(T-\theta)}H \tag{7.59}$$

So sánh (7.59) với công thức $\vec{I} = \beta\vec{H}$ ta có độ cảm từ môi của sắt từ khi $T > \theta$

$$\beta = \frac{C}{T-\theta} = \frac{\mu_0 I_S}{3Nk_B(T-\theta)} \tag{7.60}$$

Đó là định luật Curie – Weiss, được áp dụng tốt cho phần lớn các chất sắt từ.

Tài liệu tham khảo

[1] Đào Văn Phúc, *Điện động lực học*, NXB Giáo Dục, Hà Nội 1976.

[2] Nguyễn Văn Thoả, *Điện động lực học* (Tập 1), NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1982.

[3] Lê Thị Thai, *Giáo trình điện động lực học*, ĐHSP Vinh 1998.

[4] Nguyễn Hữu Mình và các tác giả, *Bài tập vật lý lý thuyết* (Tập 1), NXB Giáo Dục, Hà Nội 1983.